Phụ lục 5

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN HỌC

TÀI LIỆU GIẢNG DẠY
MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

GV biên soạn: Trần Quang Hà

Trà Vinh, 2013

Lưu hành nội bộ

MỤC LỤC

Nội dung **Trang**

Chương 1

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong chương này, người học có thể:
- Tính các phép toán trên ma trận
- Ứng dụng ma trận giải hệ phương trình tuyến tính

1.1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ MA TRẬN:

1.1.1. Định nghĩa:

Một ma trận A loại mxn trong trường K là một bảng chữ nhật gồm mxn phần tử trong K được viết thành m dòng và n cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

trong đó $a_{ij} \in$ K là phần tử ở vị trí dòng thứ i và cột thứ j của A

- Ma trận A có thể viết gọn là A = (a_{ij})
- Ký hiệu $M_{mxn}(K)$ là tập hợp tất cả các ma trận loại mxn trên K
- Một ma trận trên K thường được ký hiệu bởi những chữ in hoa (ví dụ: A, B, C,....)
- Ký hiệu $A \in M_{mxn}(K)$ cho biết A là một ma trận loại mxn trên K
- Ký hiệu $[A]_{ij}$ (hoặc a_{ij}) được hiểu là phần tử nằm ở vị trí (i, j) của A

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ thì } a_{11} = 1,\ a_{22} = 7,\ a_{23} = 5,\ ....$$

- Nếu m = n thì ta nói A là một ma trận vuông cấp n trên K. Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên trường K ký hiệu $M_n(K)$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2i & i \end{pmatrix}$$

+ Các phần tử trên đường chéo chính 2, -1, i

+ Các phần tử trên đường chéo phụ 2, -1, 4

1.1.2. Định nghĩa:

Ta nói $M_{mxn}(K)$ là ma trận không (hay ma trận zero), ký hiệu A = O_{mxn} (hay đôi khi là 0 nếu không có sự nhầm lẫn), nếu $a_{ij}=0$, $\forall$ i,j

Ví dụ:

$$O_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN:

1.2.1. Định nghĩa:

Cho A, B $\in M_{mxn}(K)$. Ta nói A=B nếu $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall$ i,j

Ví du:

$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ thì A=B <=> p = 2, q = 4, 1 = n,

1.2.2. Định nghĩa:

Cho $A \in M_{mxn}(K)$. Ta gọi $B \in M_{mxn}(K)$ là chuyển vị của A (ký hiệu B = A^T), nếu $b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$

Ví dụ:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ thì $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

➢ **Tính chất:**

(i) $(A^T)^T = A$;

(ii) $A^T = B^T$ <=> A = B

1.2.3. Định nghĩa:

Cho A$\in M_{mxn}(K)$ và c $\in$ K. Tích của c với A (ký hiệu cA) là một ma trận được định nghĩa bởi $cA = (ca_{ij})_{mxn}$.

Nếu c = -1 thì ta ký hiệu (-1)A = - A và gọi là ma trận đối của A.

Ví dụ:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Tính chất:

Cho $A \in M_{mxn}(K)$ và $c, d \in K$. Khi đó:

(i) (c.d).A = c.(d.A), suy ra (-c)A = c(-A);

(ii) $(c.A)^T = c.A^T$.

1.2.4. Định nghĩa:

Cho $A, B \in M_{mxn}(K)$. Tổng của A và B (ký hiệu: A + B) là một ma trận thuộc $M_{mxn}(K)$ được định nghĩa bởi

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right),\ \forall i, j.$$

Ví dụ: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

- ***Tính chất:*** Cho $A, B, C \in M_{mxn}(K)$ và $c,d \in K$. Khi đó

(i) A + B = B + A;

(ii) (A + B) + C = A + (B + C);

(iii) 0 + A = A + 0 = A;

(iv) A + (-A) = (-A) + A = 0;

(v) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

(vi) c(A + B) =cA +cB;

(vii) (c + d)A = cA + dA

1.2.5. Định nghĩa

Cho $A \in M_{mxn}(K)$ và $B \in M_{nxp}(K)$. Tích của A và B (ký hiệu AB) là một ma trận C thuộc $M_{mxp}(K)$ được định nghĩa bởi

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...a_{in}b_{nj}, i=1,2...,m;\ j=1,2,...,p$$

Ví d: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ta có

$$AB = \begin{pmatrix} 1.1+1.3 & 1.2+1.4 \\ 2.1+1.3 & 2.2+1.4 \\ 3.1+2.3 & 3.2+2.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Chú ý:

- Tích của hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số dòng của ma trận thứ hai.
- AB và BA cùng tồn tại khi A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và $AB \neq BA$
- AB = 0 có thể xảy ra $A \neq 0$ và $B \neq 0$

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

➢ ***Tính chất:***

Cho $A, A' \in M_{m \times n}(K)$, $B, B' \in M_{n \times p}(K)$, $C \in M_{p \times q}(K)$ và $c \in K$. Khi đó:

(i) (AB)C = A(BC);

(ii) $A0_{nxp} = 0_{mxp}$; $0_{rxm}A = 0_{rxn}$;

(iii) $A(B \pm B') = AB \pm AB'$; $(A \pm A')B = AB \pm A'B$;

(iv) $(AB)^T = A^T B^T$;

(v) c(AB) = A(cB) = (cA)B.

1.3. CÁC LOẠI MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT

1.3.1. Định nghĩa

Ta nói $A \in M_n(K)$ là ma trận đường chéo cấp n nếu i $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$, (nghĩa là ma trận vuông có tất cả phần tử bên ngoài đường chéo chính đều bằng 0).

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3.2. Định nghĩa

Một ma trận đường chéo cấp n trên K với tất cả các phần tử trên đường chéo đều bằng nhau được gọi là ma trận vô hướng cấp n trên K. Một ma trận vô hướng cấp n với phần tử 1 trên đường chéo chính được gọi là ma trận đơn vị cấp n trên K.

Ký hiệu: I_n ma trận đơn vị cấp n trên K có dạng.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}),\ i, j = \overline{1,n}$$

Trong đó δ_{ij} là ký hiệu:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = j \\ 0, & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

1.3.3. Định nghĩa:

Ta nói $B \in M_n(K)$ là ma trận tam giác trên nếu $a_{ij} = 0, \forall i > j$ (nghĩa là ma trận vuông có mọi phần tử ở bên dưới đường chéo chính đều bằng 0).

1.3.4. Định nghĩa:

Ta nói $C \in M_n(K)$ là ma trận tam giác dưới nếu $c_{ij} = 0, \forall i < j$ (nghĩa là ma trận vuông có các phần tử ở bên trên đường chéo chính đều bằng 0)

1.3.5. Định nghĩa

Một ma trận tam giác trên hoặc tam giác dưới gọi chung là ma trận tam giác.

1.3.6. Định nghĩa:

Ta nói $A \in M_n(K)$ là một ma trận phản đối xứng (hay phản xứng) nếu $A^T = -A$, nghĩa là $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall$ i,j.

Nhận xét: Tất cả các phần tử trên đường chéo chính của ma trận phản ứng đều bằng 0.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.4. LŨY THỪA MA TRẬN:

1.4.1. Định nghĩa:

Cho $A \in M_n(K)$. Ta định nghĩa luỹ thừa của A một cách quy nạp như sau:

$A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A.A$, ... , $A^{k+1} = A^k.A$, $\forall\ k \in N$

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Như vậy với $A \neq 0$ nhưng $A^3=0$

Với $A \in M_n(K)$, có thể xảy ra trường hợp $A \neq 0$ nhưng $\exists A^k = 0$.

Một ma trận $A \in M_n(K)$ thoả điều kiện $A^k = 0$ với một $k \in N$ nào đó được gọi là ma trận lũy linh.

1.4.2. Tính chất:

(i) $(0_n)^k = 0_n, \forall k \in N$

(ii) $(I_n)^k = I_n, \forall k \in N$

(iii) $A^{r+s} = A^r.A^s, \forall A \in M^n(K), \forall r,s \in N$

(iv) $A^{rs} = (A^r)^s, \forall A \in M_n(K), \forall r, s \in N$

1.5. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG:

1.5.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

(i) Biến dòng i thành c lần dòng i ($c \in K$, $c \neq 0$), ký hiệu $A \xrightarrow{d_i = cd_i} A'$

(ii) Biến dòng i thành dòng i cộng c lần dòng j ($c \in K$, $i \neq j$),

ký hiệu $A \xrightarrow{d_i = d_i + cd_j} A'$

(iii) Hoán vị dòng i và dòng j của A với nhau ($i \neq j$), ký hiệu $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 = 2d_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 = d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ -1 & 11 & 21 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 11 & 21 \end{pmatrix}$$

1.5.2. Định nghĩa:

Cho $A, B \in M_{m \times n}(K)$. Ta nói A tương đương dòng với B (ký hiệu $A \sim B$) nếu B có thể nhận được từ A qua một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

1.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

1.6.1. Định nghĩa:

Một hệ phương trình tuyến tính trên K là một hệ thống gồm m phương trình bậc nhất (n ẩn) có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + & ..... & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + & ..... & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ ...... & .... & ..... & ..... & ... & .... \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & ..... & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \quad (*)$$

Trong đó $a_{ij} \in K$ (gọi là các hệ số) và các $b_i \in K$ (gọi là các hệ số tự do) là các phần tử cho trước, các x_j là các ẩn cần tìm (trong K).

Nếu (*) có $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ thì ta nói (*) là 1 hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên K.

Ví dụ: Hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & -3 \end{cases} \quad (1)$$

là một hệ gồm 3 phương trình tuyến tính 3 ẩn trên $\mathbb{R}$.

Ta nói $(c_1, ..., c_n) \in K^n$ là nghiệm của hệ (*) nếu khi ta thay $x_1 = c_1, ..., x_n = c_n$ vào (*) thì tất cả các đẳng thức trong (*) đều thoả.

Ví dụ: Hệ phương trình tuyến tính (1) có 1 nghiệm là (1, 2, 1)

1.6.2. Định lý:

Đối với hệ phương trình tuyến tính (*) thì chỉ có một trong ba trường hợp nghiệm xảy ra là: hoặc có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

1.6.3. Hệ quả:

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường hoặc có vô số nghiệm.

1.6.4. Định nghĩa:

Cho hệ phương trình tuyến tính (*), đặt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ta gọi A là ma trận hệ số, X là cột các ẩn và B cột các hệ số tự do của hệ (*), khi đó

$(*) \Leftrightarrow AX=B$.

Ký hiệu:

$$\widetilde{A} = (A\,|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ma trận $\widetilde{A}$ được gọi là ma trận mở rộng của hệ (*) khi viết $\widetilde{A}$ = (A|B) gọi là sự ma trận hoá hệ (*)

Ví dụ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

1.6.5. Định nghĩa:

Hai hệ phương trình tuyến tính (có cùng số ẩn) được gọi là tương đương nhau nếu có cùng tập hợp nghiệm.

1.6.6. Định lý:

Cho hai hệ gồm m phương trình tuyến tính n ẩn trên K có dạng ma trận hoá lần lượt là $\widetilde{A}$=(A|B) và $\widetilde{C}$ =(C|D), khi đó, nếu $\widetilde{A} \backsim \widetilde{C}$ thì hai hệ trên tương đương nhau:

Ví dụ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 = d_3 - d_2]{d_1 = d_1 - 2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_2 = d_2 - d_3 \\ d_1 = d_1 + 3d_3}]{d_3 = d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -7 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 = d_2 - 3d_1 \\ d_3 = d_3 + 2d_1}]{d_1 = -\frac{1}{7}d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Do đó hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$

1.7. THUẬT TOÁN GAUSS VÀ GAUSS – JORDAN ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

1.7.1. Thuật toán Gauss:

Cho hệ phương trình tuyến tính: AX=B

Bước 1: Ma trận hoá hệ phương trình dưới dạng: $\tilde{A}$ = (A|B)

Đặt i:=1 và j:= 1 rồi chuyển sang bước 2

Bước 2: nếu j > n hoặc i > m thì thuật toán kết thúc, ngược lại thì ta chuyển sang bước 3

Bước 3: nếu $a_{ij} = 0$ thì ta chuyển sang bước 4. Ngược lại thì ta thực hiện lần lượt các phép biến đổi

$$d_k = d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad , \; k = \overline{i+1, m}$$

ta chuyển sang bước 5

Bước 4: Nếu tồn tại $k > i$ sao cho $a_{kj} \neq 0$ thì ta thực hiện biến đổi $d_k \leftrightarrow d_i$ rồi quay lại bước 3. Ngược lại thì ta thay j bởi j + 1 rồi quay lạ bước 2

Bước 5: Thay i bởi i + 1 và j bởi j + 1 rồi quay lại bước 2.

Vídụ: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 = d_3 - 3d_1]{d_2 = d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 = d_3 - 4d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Suy ra $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, -1)$.

1.7.2. Thuật tóan Gauss – Jordan:

Nếu ta thay bước 3 trong thuật toán Gauss bởi bước 3' mạnh hơn thì thuật toán thu được gọi là thuật toán Gauss – Jordan.

Bước 3' Nếu $a_{ij} = 0$ thì ta chuyển sang bước 4. Ngược lại thì ta thực hiện lần lượt các phép biến đổi.

$$d_i = \frac{1}{a_{ij}} d_i \; ; \quad d_k = d_k - \frac{a_{kj}}{d_i} \; , \quad \forall k \neq i$$

rồi chuyển sang bước 5.

Nếu ma trận thu được cuối cùng trong thuật toán Gauss – Jordan có dạng (A'|B'). Thì A' được gọi là ma trận rút gọn theo dòng từng bậc của A (hay ma trận rút gọn), ký hiệu R_A

Ví dụ:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_B$$

1.7.3. Định nghĩa:

Cho $A \in M_{m \times n}(K)$ có ma trận rút gọn theo dòng từng bậc là R_A, khi đó số dòng khác 0 của R_A được gọi là hạng của A, kí hiệu r(A).

Ví dụ:

$$R_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

1.7.4. Mệnh đề:

i) $r(R_A) = r(A)$

ii) $0 \leq r(A) \leq \min\{m,n\}$

iii) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = O_{m \times n}$

1.7.5. Định nghĩa:

Nếu ma trận trên K có các dòng khác 0 nằm bên trên các dòng 0, đồng thời trên 2 dòng khác 0 thì phân tử khác 0 đầu tiên của dòng dưới nằm bên phải phần tử khác 0 đầu tiên của dòng trên, thì ma trận đó được gọi là ma trận bậc thang trên K.

1.7.6. Định nghĩa:

Ma trận bậc thang B được gọi là dạng bậc thang của A nếu $B \sim A$.

1.7.7. Mệnh đề:

Hạng của ma trận bậc thang bằng số dòng khác không của nó.

1.7.8. Định lý: (Kronecker – Capelli)

Hệ phương trình tuyến tính AX=B có nghiệm nếu và chỉ nếu $r(A) = r(\widetilde{A})$

1.7.9. Định lý:

Nếu $\widetilde{A}$ = (A|B) là dạng ma trận hóa của hệ phương trình tuyến tính AX=B thì r($\widetilde{A}$)= r(A) hoặc r($\widetilde{A}$)= r(A) + 1. Hơn nữa,

(i) Nếu r($\widetilde{A}$) = r(A) + 1 thì hệ vô nghiệm

(ii) Nếu r($\widetilde{A}$)=r(A)=n thì hệ có nghiệm duy nhất

(iii) Nếu r($\widetilde{A}$)=r(A)<n thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do n – r(A).

1.8. MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

1.8.1. Định nghĩa:

Một ma trận cấp n trên K nhận được từ I_n qua duy nhất một phép biến đổi sơ cấp trên dòng được gọi là một ma trận sơ cấp.

Ví dụ:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8.2. Định nghĩa:

Cho $A \in M_{m \times n}(K)$. Ta nói A khả nghich trái nếu tồn tại $B \in M_{m \times n}(K)$ sao cho BA = I_n (khi đó B được gọi là nghịch đảo trái của A). A được gọi là khả nghịch phải nếu tồn tại $C \in M_{nxm}(K)$ sao cho AC = I_m (khi đó C được gọi là nghịch đảo phải của A).

Cho $A \in M_n(K)$. Ta nói A khả nghịch nếu tồn tại $B \in M_n(K)$ sao cho AB = BA = I_n, khi đó B được gọi là ma trận nghịch đảo của A.

1.8.3. Mệnh đề:

Cho A, $B \in M_n(K)$, khi đó

(i) Nếu A có một dòng (hay một cột) bằng 0 thì A không khả nghịch

(ii) Ma trận nghịch đảo của A (nếu có) là duy nhất và được ký hiệu bởi A^{-1}

(iii) Nếu A khả nghịch thì A^{-1} ; A^T ; cA ($c \neq 0$) cùng khả nghịch và hơn nữa

$$(A^{-1})^{-1} = A;\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;\ (cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

(iv) Nếu A và B cùng khả nghịch thì tích AB cũng khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1.8.4. Định lý:

Cho $A \in M_n(K)$ và A khả nghịch (<=> $A \sim I_n$) khi đó những phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào biến A thành I_n thì cũng chính chúng (theo thứ tự đó) sẽ biến I_n thành A^{-1}

Hay nói cách khác,

nếu $A \xrightarrow{\phi_1} A_1 \xrightarrow{\phi_2} \ldots \xrightarrow{\phi_k} A_k = I_n$

thì $I_n \xrightarrow{\phi_1} B_1 \xrightarrow{\phi_2} \ldots \xrightarrow{\phi_k} B_k = A^{-1}$

Như vậy để tìm A^{-1} ta thành lập ma trận mở rộng $(A|I_n)$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để đưa A về I_n. Khi đó ma trận tương ứng bên phải vạch "|" chính là A^{-1}

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Thành lập ma trận mở rộng:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 = d_3 + 7d_1]{d_2 = d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 = -d_2]{d_3 = d_3 + 4d_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 = d_2 - 2d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -9 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 = d_3 - 2d_2]{d_1 = d_1 - 3d_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -11 & 27 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 22 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 = d_2 - 2d_3]{d_1 = d_1 - d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 22 & -53 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 22 & 5 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1})$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 22 & -53 & -12 \\ -9 & 22 & 5 \end{pmatrix}$.

1.9.ỨNG DỤNG MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN

1.9.1. Mệnh đề:

Cho $A \in M_m(K)$, X và $B \in M_{mxn}(K)$. Khi đó, nếu A khả nghịch thì phương trình AX=B có nghiệm duy nhất $X=A^{-1}B$.

1.9.2. Mệnh đề:

Cho $A \in M_n(K)$, X và $B \in M_{m \times n}(K)$. Khi đó, nếu A khả nghịch thì phương trình XA=B có nghiệm duy nhất $X=BA^{-1}$.

1.9.3. Mệnh đề:

Cho $A \in M_m(K)$, $C \in M_n(K)$, $X \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{m \times n}(K)$. Khi đó, nếu A và C khả nghịch thì phương trình AXC=B có nghiệm duy nhất $X=A^{-1}BC^{-1}$

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ta có: $X = A^{-1}B$

Với $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ => $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

❖ BÀI TẬP CỦNG CỐ

1.1 Cho 2 ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính $3A \pm 2B$; $A^T A$; $A.A^T$.

1.2 Cho

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tính 3A + 4B – 2C

1.3 Tìm x, y, z và w, nếu

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

(*Hướng dẫn*: So sánh hai ma trận để đưa ra hệ 4 phương trình bậc nhất và tìm nghiệm của hệ)

1.4. Cho $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Tìm $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ sao cho 2A = 3B – 2C

1.5 Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tính 2A + 3B, 3A – 4C, B + 2D

b) Tính AB – BA, AC – CD, CD – DC, AC + BD

1.6. Tính tích các ma trận:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.7. Cho A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tính $A^2,\ A^3$

1.8. Tính $A^n, n \in \mathbb{N}$ với:

(a) A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; (b) A = $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) A = $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$;

(d) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (e) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(f) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (g) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(*Hướng dẫn*: Tính A^2, A^3, … rồi suy ra A^n)

1.9. Tính AB – BA nếu

(a) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1.10. Tính $A^T A$ và AA^T của ma trận A sau:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1.11. Tìm tất cả các ma trận cấp 2 giao hoán với ma trận:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(*Hướng dẫn*: Tìm tất cả các ma trận $C \in M_2(R)$ sao cho AC = CA)

1.12. Tìm tất cả các ma trận cấp 3 giao hoán với ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.13. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Gauss-Jordan:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 13x_3 = 7 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9 \\ 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 22 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 - x_4 = 10 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

1.14. Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

1.15. Xác định hạng của các ma trậu sau:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

1.16. Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (d*) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$

1.17. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Xác định trị số k sao cho

i) hệ có một nghiệm duy nhất.

ii) hệ không có nghiệm.

iii) hệ có vô số nghiệm

1.18. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

Xác định trị số k sao cho:

i) hệ có nghiệm duy nhất.

ii) hệ không có nghiệm.

iii) hệ có vô số nghiệm.

1.19. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

Xác định tham số λ sao cho:

i) hệ vô nghiệm.

ii) hệ có nghiệm và giải tìm nghiệm.

1.20. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases}$$

Xác định tham số λ sao cho:

i) hệ vô nghiệm.

ii) hệ có nghiệm và giải tìm nghiệm.

1.21. Bằng phương pháp Gauss – Jordan, hãy tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & 12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

1.22. Giải các phương trình ma trận

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(f) $X \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.23. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

(a) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9; \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18; \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5; \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27; \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40; \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$

Chương 2

ĐỊNH THỨC

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong chương này, người học có thể:
- Tính định thức
- Ứng dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính

2.1. HOÁN VỊ

Cho tập hợp $X \neq \varnothing$ gồm n phần tử (ta có thể đồng nhất $X = \{1, 2, \ldots, n\}$). Đặt S_n là tập hợp tất cả các song ánh đi từ X vào X. Khi đó S_n có đúng n! phần tử.

Mỗi phần tử $\sigma \in S_n$ được gọi là một hoán vị hay một phép thế trên tập hợp X và nó có thể được biểu diễn bởi một ma trận loại 2 x n.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

trong đó ở dòng thứ nhất, các phần tử của tập X được sắp xếp theo một thứ tự nào đó, dòng thứ hai gồm ảnh của các phần tử tương ứng ở dòng thứ nhất qua song ánh σ.

Ví dụ:

Hoán vị $\sigma \in S_3$ xác định bởi $\sigma(1) = 2$; $\sigma(2) = 3$; $\sigma(3) = 1$ có thể được mô tả như sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1.1. Định nghĩa:

Cho $X = \{i_1, i_2, ..., i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Nếu $\sigma \in S_n$ thỏa $\sigma(i_1)=i_2$; $\sigma(i_2)=i_3$; … ; $\sigma(i_{r-1})=i_r$; $\sigma(i_r) = i_1$ và $\sigma(j) = j$, $\forall j \notin X$ thì ta nói σ là một r – chu trình (hay một chu trình dài r), và ký hiệu bởi $\sigma = (i_1\ i_2 \ldots i_r)$.

Ví dụ:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ có chu trình là $\sigma = (1\ 2\ 3)$

$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ có chu trình là r = (1 3).

2.1.2. Định nghĩa:

Hai chu trình $(i_1 \ldots i_r)$ và $(j_1 \ldots j_s)$ được gọi là rời nhau nếu $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_s\} = \varnothing$.

2.1.3. Định lý:

Mọi hoán vị $\sigma \neq e$ đều được phân tích thành tích các chu trình rời nhau.

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 6\ 3)(2\ 4).$$

2.1.4. Định nghĩa:

Cho $\sigma \in S_n$. Ta nói rằng (i, j) tạo thành một nghịch thế đối với σ nếu

$(i - j)[\sigma(i) - \sigma(j)] < 0$.

Nếu số các nghịch thế đối với σ là k thì dấu của σ (ký hiệu sgn(σ)), là một hàm được định nghĩa bởi $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

Nếu sgn(σ)=1 thì σ được gọi là hóan vị chẵn, nếu sgn(σ) = -1 thì σ được gọi là hóan vị lẻ.

2.2. ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

2.2.1. Định nghĩa:

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Định thức của A (ký hiệu |A|, hay det(A)) là một phần tử trong K được xác định bởi

$$|A| = \sum \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n} \quad (\text{với } (\sigma_i = \sigma(i)).$$

Định thức của một ma trận vuông cấp n trên K thường được gọi là một định thức cấp n.

- Định thức cấp 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Định thức cấp 3: (tính bằng quy tắc Sarruss)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

cột 1 cột 2 cột 3 cột 1 cột 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

$$- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Ví dụ: Tìm định thức của ma trận

A = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(K)$, Ta có |A| = (4.3.4 + 1.1.5 + 2.2.1) – (2.3.5 + 4.1.1 + 1.2.4) = 15

2.3. TÍNH CHẤT CĂN BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

2.3.1. Mệnh đề:

Nếu $A \in M_n(K)$ thì det(A) = det(A^T).

2.3.2. Mệnh đề:

Nếu $A \in M_n(K)$ có ít nhất một dòng là dòng 0, thì det(A) = 0.

2.3.3. Mệnh đề:

Cho $A \in M_n(K)$, nếu A' nhận được từ A bằng cách đổi chỗ 2 dòng $i \neq j$ thì $\det(A') = -\det(A)$.

2.3.4. Hệ quả:

Nếu 2 dòng của $A \in M_n(K)$ có các hệ số tương ứng bằng nhau thì det(A)=0.

2.3.5. Mệnh đề:

Nếu nhân một dòng của $A \in M_n(K)$ với một phần tử $c \in K$ thì det(A) tăng lên c lần.

2.3.6. Hệ quả:

Nếu hai dòng của $A \in M_n(K)$ có hệ số tương ứng tỉ lệ nhau thì det(A)=0.

2.3.7. Bổ đề:

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ nếu các phần tử dòng i của A có dạng $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = \overline{1,n}$, thì

det(A) = det(B) + det(C)

với B, C là những ma trận có được từ A bằng cách thay dòng i của A bởi các giá trị b_j và c_j tương ứng.

2.3.8. Mệnh đề:

Cho A $\in$ M_n (K), nếu A' có được từ A qua phép biến đổi sơ cấp trên dòng loại (ii) thì det (A) = det (A').

2.3.9. Hệ quả:

Nếu $A' \in M_n$ (K) có được từ A $\in M_n$ (K) qua một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng loại (ii) thì $\det(A') = \det(A)$.

2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN CỘT:

(i) Nhân cột i của A với c$\in$ K (c$\neq$ 0), ký hiệu A $\xrightarrow{c_i = cc_i}$ A'

(ii) Thay đổi i của A thành cột i cộng c lần cột j, c $\in$ K, i $\neq$ j, ký hiệu A $\xrightarrow{c_i = c_i + cc_i}$ A'

(iii) Hoán vị cột i và cột j của A với nhau (i $\neq$ j), ký hiệu A $\xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j}$ A'

2.5. CÔNG THỨC KHAI TRIỂN ĐỊNH THỨC:

Cho A$\in M_n$ (K) , ký hiệu A(i|j) là ma trận có được từ A bằng cách "xoá bỏ" dòng i và cột j của A

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A(2|3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2.5.1. Bổ đề:

Cho A= $(a_{ij}) \in M_n$ (K), nếu tồn tại i, j , sao cho $a_{ik} = 0$, $\forall$ k $\neq$ j thì det A = $(-1)^{i+j}$ a_{ij} det (A(i|j))

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-d)c \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = abcd.$$

2.5.2. Định nghĩa:

Giả sử A = (a_{ij}) $\in$ M_n (K). Với mỗi i, j, phần tử $c_{ij} = (-1)^{i+j}$ det(A(i|j)) được gọi là phần bù đại số của a_{ij}.

2.5.3. Định lý:

Giả sử A = $(a_{ij}) \in M_n(K)$. Với mỗi i, j đặt c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}.

Khi đó $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}c_{pj}, \forall p;$ (1)

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{iq}c_{iq}, \forall q; \quad (2)$$

Công thức (1) được gọi là công thức khai triển định thức theo dòng p và công thức (2) được gọi là công thức khai triển định thức theo cột q của A.

Ví dụ:

Cho A = $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ .Khi đó

$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -13$; $C_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -13$; $C_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ nên

Det (A) = $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$

= 4(-13) + (-1)(13) + 2.13 = -39

2.5.4. Hệ quả:

Nếu A = $(a_{ij}) \in M_n(K)$ là một ma trận tam giác thì Det (A) = $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$

2.6. ĐỊNH LÝ LAPLACE:

2.6.1. Định nghĩa:

Cho A = $(a_{ij}) \in M_n(K)$. Chọn trong A các dòng $i_1, \ldots, i_k$, ($1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$) và các cột $j_1, \ldots, j_k$, ($1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$). Ký hiệu $A(i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots j_k)$ là ma trận có được từ A bằng cách "xóa bỏ" các dòng và các cột trên. Khi đó

$$M = \det\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix}$$

được gọi là một định thức con cấp k của A sinh bởi các dòng $i_1, \ldots, i_k$ và các cột $j_1, \ldots, j_k$;

$M' = (-1)^{(i_1+\ldots+i_k)+(j_1+\ldots+j_k)} \det(A(i_1,\ldots,i_k | j_1,\ldots,j_k))$ được gọi là phần bù đại số của M.

2.6.2. Bổ đề:

Cho $A \in M_n(K)$. Tích của một định thức con cấp k với phần bù đại số của nó có dạng của $k!(n-k)!$ tích trong det(A).

2.6.3. Định lý (Laplace)

Cho $A \in M_n(K)$. Chọn trong A các dòng $i_1 < \ldots < i_k$. Khi đó

$$\text{Det}(A) = \sum_{j_1<\ldots<j_k} MM',$$

trong đó M là định thức con cấp k của A sinh bởi các dòng $i_1, \ldots, i_k$ và các cột $j_1, \ldots, j_k$; M' là phần bù đại số của M.

Ví dụ:

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, khai triển theo dòng 1 và dòng 4.

$$|A| = (-1)^{1+4+1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+2+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4+2+4}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+3+4}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4+2+4}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-5)5 = 25$$

2.7. ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN KHẢ NGHỊCH:

2.7.1. Bổ đề:

Nếu $A, S \in M_n(K)$ và S là một ma trận sơ cấp thì det (S.A) = det (S) det (A) và det(S) $\neq 0$

2.7.2. Định lý:

Cho $A \in M_n(K)$. Khi đó A khả nghịch nếu và chỉ nếu det (A) $\neq 0$.

2.7.3. Định lý:

Nếu $A, B \in M_n(K)$ thì $|A.B| = |A||B|$.

2.7.4. Hệ quả:

Nếu $A, A_1, A_2, \ldots, A_K \in M_n(K)$ thì

(i) $|A_1A_2 \ldots A_k| = |A_1||A_2| \ldots |A_k|$

(ii) $|A^m| = |A|^m$, $\forall\ m \in N$

(iii) Nếu A khả nghịch thì $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

2.7.5. Định lý:

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, với mỗi i, j đặt c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij} và $C = (c_{ij}) \in M_n(K)$.

Khi đó:

$$A.C^T = C^T A = |A| I_n$$

Suy ra, nếu A khả nghịch thì $A^{-1} = |A|^{-1} C^T$

Ma trận C^T trong định lý trên được gọi là ma trận phó của A, ký hiệu adj (A) .

Ví dụ:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $|A| = 2 \neq 0$ nên A khả nghịch

Ta có:

$c_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6$, $\quad c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -6$, $\quad c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$,

$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -5$, $\quad c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8$, $\quad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$,

$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $\quad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$, $\quad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$$C\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8. PHƯƠNG PHÁP CRAMER ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

Cho một hệ gồm n phương trình tuyến tính n ẩn trên K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + & .... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + & .... & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ .... & .... & .... & .... & ..... \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 + & .... & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

Với mỗi j = $\overline{1,n}$ ta gọi A_j là ma trận có được từ A bằng cách thay các phần tử cột j của A bởi các phần tử của cột B.

2.8.1. Bổ đề:

Nếu (c_1, ... , c_n) là một nghiệm của hệ (*) thì $|A|c_j = |A_j|$, $\forall j = \overline{1,n}$

2.8.2. Định lý:

Với hệ phương trình tuyến tính (*)

(i) Nếu $|A| \neq 0$ thì (*) có nghiệm duy nhất X = (x_1, x_2, ... , x_n) , với $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$

(ii) Nếu |A| = 0 và tồn tại j $\in \{1,2,....,n\}$ sao cho $|A_j| \neq 0$ thì (*) vô nghiệm

(iii) Nếu |A| = 0 và $|A_j| = 0$, $\forall j = \overline{1,n}$ thì (*) không có nghiệm duy nhất

(trong trường hợp này nếu muốn biết hệ vô nghiệm hay vô số nghiệm thì ta phải dùng phương pháp Gauss – Jordan để giải lại)

Ví dụ: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2 \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có dạng AX = B với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m=1 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Khi đó |A| = (m–1)(m-3); $|A_1|$ = 4(3-m); $|A_2|$ = 0 và $|A_3|$ = 2(m-3)

- Nếu $|A| \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $m \neq 1$ và $m \neq 3$) thì hệ có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{4}{(1-m)} ; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 0 ; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2}{m-1}$$

- Nếu m = 1 thì |A| = 0 và $|A_1| = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm .

- Nếu m = 3 thì |A| = 0 và $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$

Khi đó ta giải trực tiếp hệ bằng phương pháp Gauss. Trong trường hợp này hệ trở thành

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm => $\begin{cases} x_2 \quad \text{tùy ý} \\ x_1 = 3x_2 - 2 \\ x_3 = 1 - \dfrac{5}{2}x_2 \end{cases}$

❖ BÀI TẬP CỦNG CỐ

2.1. Tính các định thức cấp 3 sau trên *IN*.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

2.2. Tính các định thức cấp 4 trên R

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$; (j) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2.3. Chứng tỏ rằng các giá trị định thức sau bằng 0.

(a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (b+c)^2 \\ ca & c^2+a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$.

2.4. Tìm ma trận phó của các ma trận sau:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5. Tính các định thức cấp n sau trên R.

(a) $\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

2.6. Hãy tính các định thức sau trên R và cho biết khi nào ma trận tương ứng khả nghịch?

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} a-b+c & a-b & b+2a+2c \\ b-c+a & b-c & c+2a+2b \\ c-a+b & c-a & a+2b+2c \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$.

2.7. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng cách áp dụng công thức định thức.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.8. Khi nào các ma trận sau khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của nó lúc đó.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5-m \\ 2 & 1 & 2 \\ 3m-1 & m+3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.9. Giải các hệ phương trình sau bằng cách áp dụng quy tắc Cramer.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15; \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

2.10.Giải và biện luận (theo tham số thực) các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3; \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3; \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + (m-1)x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 4x_2 + (4m-2)x_3 = -1; \\ 3x_1 + (m+1)x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = m; \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = m^2; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m^3 \end{cases}$

Chương 3

KHÔNG GIAN VECTƠ

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong chương này, người học có thể:
- Tìm cơ sở cho không gian vectơ và không gian con

3.1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VECTƠ

3.1.1. Định nghĩa

Ta nói tập hợp V là một không gian vectơ trên trường K hay một K- không gian vectơ, nếu V được trang bị một phép toán đại số (gọi là phép cộng), ký hiệu (+) và một phép nhân vô hướng, ký hiệu (.) thoả mãn các điều kiện sau:

i) Tính giao hoán của phép cộng:

$$\forall (x,y) \in V^2, x + y = y + x;$$

ii) Tính kết hợp của phép cộng

$$\forall (x,y,z) \in V^3, (x + y) + z = x + (y + z);$$

iii) Tồn tại trong V một phần tử không, ký hiệu là 0, thỏa mãn

$$\forall x \in V, x + 0 = x;$$

iv) $\forall x \in V$, tồn tại một phần tử đối, ký hiệu là $-x$, thoả mãn $x + (-x) = 0$;

v) $\forall (x,y) \in V^2$, $\forall \alpha \in K$, $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$;

vi) $\forall x \in V$, $\forall (\alpha,\beta) \in K^2$, $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$;

vii) $\forall x \in V$, $\forall (\alpha,\beta) \in K^2$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$;

viii) $\forall x \in V$, $1.x = x$.

Chú ý: Các phần tử của V được gọi là các vectơ và được ký hiệu bởi chữ la tinh nhỏ x,y,z,....Các phần tử của trường K được gọi là các vô hướng và được ký hiệu bởi các chữ Hy Lạp nhỏ α, β, γ,.....

3.1.2. Tính chất:

(i) $\forall x \in V$, $0.x = 0$, trong đó 0 ở vế phải là vectơ không, còn 0 ở vế trái là phần tử không của trường K.

(ii) $\forall x \in V$, $-x = (-1)x$

(iii) $\forall x \in V, \forall \alpha \in K$, $-(\alpha x) = (-\alpha)x = \alpha(-x)$

(iv) $\alpha .0 = 0$

(v) Nếu α x = 0 thì hoặc α = 0 hoặc x = 0

(vi) $\begin{cases} \alpha x = \beta x, x \neq 0 => \alpha = \beta \\ \alpha x = \alpha y, \alpha \neq 0 => x = y \end{cases}$

Ví dụ:

Gọi C[a,b] là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn [a,b]. Định nghĩa các phép toán trong C[a,b] như sau:

Nếu f,g $\in$ C[a,b], $\alpha \in$ R thì (f + g)(t) = f(t) + g(t), $\forall$ t $\in$ [a,b]

(α f)(t) = α f(t), $\forall$ t $\in$ [a,b]

C[a,b] là một không gian vectơ trên R

3.2. KHÔNG GIAN CON

3.2.1. Định nghĩa:

Cho V là một K – không gian vectơ và W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó W được gọi là một không gian con của V nếu W là một K – không gian vectơ ứng với những phép toán (+) và (.) của V khi ta hạn chế chúng lên W.

3.2.2. Định lý:

Tập con W $\neq \emptyset$ của không gian vectơ V là một không gian con của V khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thoả:

(i) $\forall$ (x,y) $\in W^2$, x + y $\in$ W;

(ii) $\forall \alpha \in$ K, $\forall$ x $\in$ W, α x $\in$ W.

3.2.3. Định lý:

Giao của một họ bất kỳ các không gian con của V là một không gian con của V.

3.3. SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH VÀ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH:

3.3.1. Định nghĩa:

Cho V là một không gian vectơ trên trường K và v, v_1, v_2, v_3, … , v_n là các phần tử của V. Ta nói vectơ v là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ v_1, v_2, v_3, ..., v_n nếu tồn tại các vô hướng $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in$ K sao cho

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Ví dụ:

Cho V = R^3, v = (5, 1, 3), v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (4, 2, 5), v_3 = (2, 4, 5) thì v = $3v_1 + v_2 - v_3$

3.3.2. Định nghĩa:

Họ các vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ của không gian vectơ V trên trường K được gọi là phụ thuộc tuyến tính, nếu $\exists$ các vô hướng $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ không phải tất cả đều bằng không, sao cho

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Họ vectơ không phụ thuộc tuyến tính được gọi là họ độc lập tuyến tính. Nghĩa là

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$$

Chú ý:

(i) Mọi họ hữu hạn các vectơ, trong đó có vectơ không đều phụ thuộc tuyến tính

(ii) $\forall v \in V$, $\{v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $v \neq 0$

3.4. KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP:

Nếu S là một tập hợp con khác rỗng của V thì họ các không gian con của V chứa S là một tập khác rỗng. Phần giao của họ những không gian con như vậy là một không gian con, không gian con này được ký hiệu là $\langle S \rangle_K$ và gọi là không gian con của V sinh ra bởi tập S. Nếu $\langle S \rangle = V$ thì ta gọi S là tập sinh của V và ta còn nói V được sinh ra bởi tập S.

3.4.1. Định lý:

Cho $\phi \neq S \subset V$. Khi đó

$$\langle S \rangle = \{v \in V \mid \exists n \in N^*, \exists (a_1, \ldots, a_n) \in S^n, \exists ((\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in K^n, v = \sum \alpha_i a_i \}$$

Ví dụ:

Cho $V = K^3$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (1, 1, 0)$

Khi đó: $\langle v \rangle = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in K\}$ và

$$\langle v, w \rangle = \{\alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in K\} = \{(\alpha + \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in K\}$$

3.5. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU:

3.5.1. Định nghĩa:

Không gian vectơ V trên K gọi là n chiều, nếu tồn tại n vectơ độc lập tuyến tính và không tồn tại một họ độc lập tuyến tính nào chứa nhiều hơn n vectơ.

Vậy, số chiều của không gian vectơ là số tối đại những vectơ độc lập tuyến tính.

Số chiều của không gian vectơ V ký hiệu là: dimV

Không gian vectơ có số chiều hữu hạn gọi là không gian vectơ hữu hạn chiều.

Không gian vectơ có thể tìm được vô số những vectơ độc lập tuyến tính gọi không gian vectơ vô hạn chiều.

3.5.2. Định nghĩa:

Họ n vectơ độc lập tuyến tính của một không gian vectơ n chiều gọi là một cơ sở của V.

3.5.3. Định lý:

Mọi vectơ x của không gian vectơ n chiều V đều viết được một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của những vectơ cơ sở.

3.5.4. Định lý:

Nếu B = $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ là một tập độc lập tuyến tính và sinh ra V thì B là một cơ sở của V.

Ví dụ:

Tìm số chiều và một cơ sở của không gian lời giải của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & -13 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vì r(A) = 2, Nên $\dim_k S_A$ = n – r(A) = 4 – 2 = 2

$$S_A \begin{cases} x_1 = 8x_3 + 13x_4 = 8\alpha + 13\beta \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 = -6\alpha + 5\beta \\ x_3 = \alpha \text{ Tuỳ ý} \\ x_4 = \beta \text{ Tuỳ ý} \end{cases}$$

Cho $\alpha = 1, \beta = 0$ => ε_1 = (8, - 6, 1, 0)

Cho $\alpha = 0, \beta = 1$ => ε_2 = (13, 5, 0, 1)

Vậy một cơ sở của S_A là B = { $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ }

3.5.5. Định lý: (về cơ sở không toàn vẹn)

Trong không gian vectơ hữu hạn chiều, mọi họ độc lập tuyến tính đều có thể bổ túc thành một cơ sở.

3.6. TỔNG CÁC KHÔNG GIAN CON:

3.6.1. Định lý:

Cho V là K – không gian vectơ, W_1 và W_2 là hai không gian con của V. Khi đó tập hợp

$$\{u + v \mid u \in W_1, v \in W_2\}$$

là một không gian con của V, được gọi là tổng các không gian con W_1 và W_2 và ký hiệu là $W_1 + W_2$

3.6.2. Nhận xét:

Từ định nghĩa trên ta thấy: Nếu W_1, W_2 là các không gian con của K – không gian vectơ V thì $\forall x \in V$ ta có $x \in W_1 + W_2 \Leftrightarrow \exists\, a \in W_1, \exists\, b \in W_2$; $x = a + b$.

Ví dụ:

$$W_1 = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in K^3 \mid \alpha = \beta = -\gamma\} = \{(\alpha,\alpha,-\alpha) \mid \alpha \in K\}$$
$$W_2 = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in K^3 \mid \alpha = \beta = \gamma\} = \{(\beta,\beta,\beta) \mid \beta \in K\}$$

Vectơ $(3, 3, -1) \in W_1 + W_2$. vì $(3, 3, -1) = (2, 2, -2) + (1, 1, 1)$ và $(2, 2, -2) \in W_1$, $(1, 1, 1) \in W_2$

Vectơ $(3, 0, 3) \notin W_1 + W_2$ vì $W_1 + W_2 = \{(\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta-\alpha) \mid \alpha, \beta \in K\}$.

3.6.3. Mệnh đề:

Cho V là K – không gian vectơ và W_1, W_2, W_3 là những không gian con của V. Khi đó:

(i) $W_1 + W_1 = W_1$;

(ii) $W_1 + \{0\} = W_1$;

(iii) $W_1 + V = V$;

(iv) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$;

(v) W_1, W_2 là các không gian con của $W_1 + W_2$;

(vi) Nếu W_1 là không gian con của W_2 thì $W_1 + W_3$ là không gian con của $W_2 + W_3$.

3.6.4. Định nghĩa:

Cho V là không gian vectơ trên K, W_1 và W_2 là những không gian con của V. Giả sử $W = W_1 + W_2$. Khi đó ta nói W là tổng trực tiếp của W_1 và W_2 nếu $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ và ký hiệu là

$$W = W_1 \oplus W_2.$$

3.6.5. Mệnh đề:

Cho V là không gian vectơ trên K, W_1 và W_2 là những không gian con của V và $W=W_1+W_2$. Khi đó W là tổng trực tiếp của W_1 và W_2 nếu và chỉ nếu mọi phần tử x của W đều viết được một cách duy nhất dưới dạng x = a + b, với $a \in W_1$ và $b \in W_2$.

3.6.6. Định nghĩa:

Cho V là một không gian vectơ trên K và W_1, W_2 là các không gian con của V. Nếu

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

thì ta nói W_1 (tương ứng W_2) là không gian con bù trực tiếp của W_2 (tương ứng W_1) trong V.

3.6.7. Định lý:

Cho W_1, W_2 là các không gian con của không gian vectơ hữu hạn chiều V. Khi đó

$$\dim(W_1+ W_2) = \dim W_1+ \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

3.7. TỌA ĐỘ

Nếu B = ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) là một cơ sở của V thì mọi phần tử $x \in V$ đều viết một cách duy nhất dưới dạng x = $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n a_n$

Ký hiệu:

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$

và gọi nó là tọa độ vectơ x trong cơ sở B

Giả sử B = ($\alpha_1, \alpha_2, ..., a_n$) và B' = $\alpha'_1, \alpha'_2, ..., a'_n$ là hai cơ sở được sắp. Lập ma trận vuông P trong đó cột thứ j là toạ độ của vectơ a_j' trong cơ sở B

$$[a_j'] = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ .. \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$

Nghĩa là:

$$P = ([a_j']_B \text{ .... } [a_n']_B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ:

Cho B = { a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (-1, 2, 2)}$\in R^3$. Chứng minh B là một cơ sở của R^3 và tìm $[u]_B$, biết u = (1, 2, 3) $\in R^3$.

Ta có: $B_o = \{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của R^3.

$$|A| = \left|[a_1]_{B_o} \quad [a_2]_{B_o} \quad [a]_{B_o}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

=> B là một tập độc lập tuyến tính => B là một cơ sở của R^3.

Để u $\in R^3$ thì u = $t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 \Leftrightarrow AT = C$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right). \text{ Vậy } [u]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3.7.1. Mệnh đề:

Cho V là một không gian vectơ n chiều trên trường K và A, B, C, là các cơ sở được sắp của V. Khi đó ta có các điều khẳng định sau:

(i) $P(A \to A) = I_n$;

(ii) $P(A \to C) = P(A \to B).P(B \to C)$;

(iii) $P(A \to B)^{-1} = P(B \to A)$

3.7.2. Định lý:

Cho B và B' là 2 cơ sở của V và P = $P(B \to B')$ là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'

Khi đó: $[x]_B = P[x]_{B'}$

suy ra $[x]_{B'} = P^{-1}[x]_B$

3.7.3. Định lý:

Cho V là một không gian vectơ n chiều và B là một cơ sở được sắp của V. Giả sử C = (v_1, ..., v_n) là một họ n vectơ bất kỳ của V. Đặt

$$P = ([v_1]_B, \dots, [v_n]_B)$$

Khi đó C là cơ sở của V nếu và chỉ nếu P khả nghịch. Hơn nữa, trong trường hợp này P = P(B $\to$ C)

❖ BÀI TẬP CỦNG CỐ

3.1. Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) (1, 1, 1), (0, 1, -2) và (-1, 1, 0)

b) $(\pi, 0)$ và (1, 2)

c) (1, 1, 0), (1, 1, 1) và (0, 1, -1)

d) (0, 1, 1), (1, 2, 1) và (1, 5, 3)

e) (1, -2, 3, -4), (3, 3, -5, 1) và (3, 0, 3,-10)

3.2. Cho các vectơ

$\alpha_1 = (1, 1, 2, 4)$ $\alpha_2 = (2, -1, -5, 2)$

$\alpha_3 = (1, -1, 4, 0)$ $\alpha_4 = (2, 1, 1, 6)$

Các vector trên có độc lập tuyến tính trong R^4 không? Tìm một cơ sở cho không gian của R^4 sinh bởi các vector này.

3.3. Chứng minh rằng các vector $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$ và $\alpha_3 = (0, -3, 2)$ lập thành một cơ sở của R^3. Tìm toạ độ của vector cơ sở chính tắc $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ và $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ trong cơ sở được sắp $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

3.4. Chứng minh rằng các vector $\alpha_1 = (1,1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0, 4)$ và $\alpha_4 =(0,0,0,2)$ lập thành một cơ sở của R^4. Tìm toạ độ của vector cơ sở chính tắc $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$ và $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$ trong cơ sở được sắp $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.

3.5. Trong R^3 chứng minh rằng không gian W sinh bởi các vector

$x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (-1, -1, 2)$, $x_3 = (-1, 1, 12)$

trùng với không gian con sinh bởi các vector $y_1 = (0, 1, 5)$, $y_2 = (1, 3, 8)$.

3.6. Trong không gian véctơ K^4 xét các véctơ sau đây

x = (1, 2, 0, 1), y = (2, 1, 3, 1), z = (7, 8, 9, 5), t = (1, 2, 1, 0),

u = (2, -1, 0, 1), v = (-1, 1, 1, 1), w = (1, 1, 1, 1)

Đặt $A=\langle x, y, z\rangle$, $B=\langle t, u, v, w\rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con A,B,

$A + B$, $A \cap B$

3.7. Trong $V=K^4$ cho các véctơ u=(1,1,0,-1), v=(1, 0, 0, -1), w=(1, 0, -1, 0).

Đặt A=$\langle$u, v, w$\rangle$ và B={$(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$}.

a) Chứng tỏ rằng B là một không gian con của V;

b) Tìm một cơ sở cho mỗi không gian con A, B, A+B, A$\cap$B.

3.8. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau

$$\text{(a)}\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0; \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{(b)}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{(c)}\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{(d)}\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0; \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_6 = 0; \\ x - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{(e)}\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

3.9. Cho các véctơ a_1=(1, 2, 0, 1), a_2=(1, 1, 1, 0), b_1=(1, 0, 1, 0), b_2=(1, 3, 0, 1), và $A = \langle a_1, a_2 \rangle, B = \langle b_1, b_2 \rangle$. Tính dim(A + B), dim(A $\cap$ B) ?

3.10. Cho a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2=(1, -1, 1, -1), a_3=(1, 3, 1, 3), b_1=(1, 2, 0, 2), b_2 =(1, 2, 1, 2), b_3=(3, 1, 3, 1), $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$. Tính dim(A + B), dim(A $\cap$ B) ?

3.11. Cho W là không gian con của R^4 sinh bởi các vector

α_1 = (1, 2, 2, 1), α_2 = (0, 2, 0, 1), α_3 = (-2, 0, - 4, 3)

a) Chứng tỏ rằng B=(α_1, α_2, α_3) là một cơ sở của W,

b) Tìm điều kiện để $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in$ W và tìm [β]$_B$

c) Cho $\gamma_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\gamma_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\gamma_3 = (0, 0, 0, 3)$

Chứng tỏ rằng B' = (γ_1, γ_2, γ_3) là một cơ sở của W.

d) Xây dựng ma trận chuyển cơ sở từ B $\to$ B'.

3.12. Cho $\alpha_1 = (1,1,-2,1), \alpha_2 = (3,0,4,-1), \alpha_3 = (-1,2,5,2)$; $\beta_1 = (4,-5,9,-7), \beta_2 = (3,1,-4,4), \beta_3 = (-1,1,0,1)$

a) Chứng minh rằng {α_1, α_2, α_3} độc lập tuyến tính.

b) {β_1, β_2, β_3} có phải có cơ sở của không gian con của R^4 sinh bởi các véctơ α_1, α_2, α_3 hay không?

3.13. Cho $A = \{(2,1,-1),(2,-1,2),(3,0,1)\}; B = \{(-3,1,2),(1,-2,5),(2,4,1)\}; C = \{(m+3,1,2),(m,m-1,1),(3m+3,m,m+3)\}$

a) Kiểm A, B là cơ sở của R^3. C là cơ sở của R^3 không?

b) Tìm x $\in R^3$ biết $[x]_A = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

c) Tìm $[y]_B$ nếu y = (a,b,c) $\in R^3$

d) Tìm $[z]_A$ nếu z $\in R^3$ và $[z]_B = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

3.14. Cho W = $\langle A \rangle \le R^4$ = V, với $A = \{\alpha_1 = (1,1,-1,0), \alpha_2 = (-1,3,4,1), \alpha_3 = (-1,4,3,2)\}$

a) Kiểm tra A là cơ sở của W

b) Cho γ = (a, b, c, d) $\in R^4$. Khi nào $\gamma \in$ W hãy tìm $[\gamma]_A$

c) Đặt $B = \{\beta_1 = (1,1,-1,-1), \beta_2 = (2,7,0,3), \beta_3 = (2,7,0,2)\}$. Kiểm B là một cơ sở của W và viết P(A $\to$ B).

d) Tìm x, $[y]_B$, $[z]_A$ nếu biết:

$[x]_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; y=(a,b,c,d) $\in$W, $[z]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong chương này, người học có thể:
- Xây dựng ánh xạ tuyến tính
- Tìm nhân, ảnh của ánh xạ tuyến tính

Nhắc lại:

** f: D→ E gọi là đơn ánh nếu*

$\forall x,x' \in D,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

** f: D → E gọi là toàn ánh nếu f(D) = E.*

** f: D → E gọi là song ánh nếu vừa đơn ánh và toàn ánh.*

** Ánh xạ ngược*

Nếu f là 1 song ánh thì ứng với mỗi phần tử y∈D. Khi đó ánh xạ y đi từ E lên D xác định bởi f(x)=y gọi là ánh xạ ngược của f và ký hiệu là f^{-1}

f^{-1} *là song ánh và ta có:* $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$

4.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT CĂN BẢN

4.1.1. Định nghĩa:

Cho V, W là hai không gian vectơ trên trường K. Ánh xạ f: V → W được gọi là một ánh xạ tuyến tính nếu:

(i) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2),\ \forall v_1, v_2 \in V$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v),\ \forall v \in V,\ \forall \alpha \in K$

Ta có thể viết lại thành:

$f(\alpha v_1 + v_2)=\alpha f(v_1)+f(v_2),\ \forall \alpha \in K,\ \forall v_1, v_2\in V$

Ký hiệu L(V, W) là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính f đi từ V vào W

Ví dụ: $f: V=R^2 \to W=R^3$

$(u,v)\mapsto (2u-v, 7v-5u, 3u+8v)$

Đặt x=(u,v) thì

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = AX^T$$

Như vậy $f(x) = AX^T,\ \forall X \in R^2$

Với $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Ta kiểm f là ánh xạ tuyến tính,

Xét $c \in R$ và $X, Y \in R^2$. Ta chứng minh

$f(cX + Y) = cf(X) + f(Y)$

Ta có:

$$f(cX + Y) = A(cX + Y)^T = A(cX^T + Y^T)$$

$$= cAX^T + AY^T = cf(X) + f(Y)$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính

4.1.2. Mệnh đề:

Giả sử f: $V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó

(i) Nếu E là không gian con của V thì f(E) là không gian con của W;

(ii) Nếu F là không gian con của W thì $f^{-1}(F)$ là không gian con của V.

Do đó ảnh của ánh xạ tuyến tính f là Im(f) = f(V) cũng là không gian con của W và nhân của f, ker(f) = $f^{-1}(0)$ là không gian con của V.

4.1.3. Mệnh đề:

Giả sử $f \in L(V, W)$. Khi đó

(i) Nếu A = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n\}$ sinh ra V thì f(A) = $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)\}$ sinh ra f(V),

(ii) Nếu A độc lập tuyến tính và f là đơn ánh thì f(A) độc lập tuyến tính.

(iii) Nếu B = $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset f(V)$ độc lập tuyến tính và $c_i \in f^{-1}(b_i)$, i = $\overline{1,n}$

thì C = $\{c_1, \ldots, c_n\}$ độc lập tuyến tính.

4.1.4. Mệnh đề: ***(xây dựng ánh xạ tuyến tính khi biết ảnh của 1 cơ sở)***

Cho B = $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở được sắp của V và $u_1, \ldots, u_n$ là n vectơ tuỳ ý của W. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính f: $V \to W$ thoả $f(e_i) = u_i$, i = $\overline{1,n}$.

Ví dụ:

R^2 có cơ sở a = $\{a_1 = (3, -7), a_2 = (-2, 4)\}$ trong R^3 chọn sẵn $\beta_1 = (-1,4,2)$, $\beta_2 = (5,-8,3)$

Hãy tìm f $\in$ L(R^2, R^3) thoả $f(\alpha_1) = \beta_1$, f(α_2)= β_2.

Giải

Xét $\forall \alpha = (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Ta cần xác định f($\alpha$) = f(u,v)

Đặt toạ độ α theo cơ sở a

$[\alpha]_a = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ thì $\alpha = c_1\alpha_1 + c_1\alpha_2 \Leftrightarrow$ (u,v)=c_1(3,-7) + c_2(-2,4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c_1 - 2c_2 = u \\ -7c_1 + 4c_2 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -v - 2u \\ c_2 = \dfrac{-7u - 2v}{2} \end{cases}$$

Từ $\alpha = c_1\alpha_1 + c_1\alpha_2$ ta có:

$$f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2)$$

$$= (-2u - v)(-1,4,2) + \left(\frac{-7u - 3v}{2}\right)(5, -8, 3)$$

$$= \frac{-1}{2}(31u + 13v, 72u + 32v, 29u + 13v)$$

Vậy $f(\alpha) = \dfrac{-1}{2}(31u + 13v, 72u + 32v, 29u + 13v)$

4.2. MA TRẬN BIỂU DIỄN ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

4.2.1. Định nghĩa:

Ma trận D $\in$ $M_{m \times n}(K)$ có cột thứ j là $[f(b_j)]_C$, j = $\overline{1,n}$ được gọi là ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở B, C ký hiệu $[f]_B^C$

Ví dụ: f: $R^3 \longrightarrow R^2$

(u, v, w) $\longmapsto$ (2u – 7v + π w, u$\sqrt{5}$ - 6v + 9w)

R^3 có cơ sở B_o={ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ }

R^2 có cơ sở B'_0 = { $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ }

Tính $f(\varepsilon_1) = (2, \sqrt{5}) \Rightarrow [f(\varepsilon_1)]_{B'o} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$f(\varepsilon_2) = (-7, -6) \Rightarrow [f(\varepsilon_2)]_{B'o} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \end{pmatrix}$

$f(\varepsilon_3) = (\pi, 9) \Rightarrow [f(\varepsilon_3)]_{B'o} = \begin{pmatrix} \pi \\ 9 \end{pmatrix}$

Suy ra:

$$[f]_{Bo}^{B_o'} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \pi \\ \sqrt{5} & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

4.2.2. Định lý:

Với mọi $x \in V$, $[f(x)]_C = [f]_B^C.[x]_B$

Ví dụ: Cho $f \in L(R^3, R^2)$

R^2 có cơ sở $B = \{b_1 = (-2,1), b_2 = (-5,2)\}$

R^3 có cơ sở $B_o = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

biết rằng ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở B_o, B:

$$[f]_{B_O}^{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Tìm f=? (viết biểu thức của f)

<u>*Giải*</u>

Xét $\alpha = (u,v,w) \in R^3$. Tìm $f(\alpha) = f(u,v,w) = ?$

$[f(\alpha)]_B = [f]_{Bo}^B [\alpha]_{Bo}$

Ta có: $[\alpha]_a = [\alpha]_{Bo} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$$[f(\alpha)]_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3u & + & v & + & 4w \\ 2u & - & 2v & + & 7w \end{pmatrix}$$

$f(\alpha) = (-3u + v + 4w)b_1 + (2u - 2v + 7w)b_2$

$= (-3u + v + 4w)(-2, 1) + (2u - 2v + 7w)(-5, 2)$

$= (-4u + 8v - 43w, u - 3v + 18w)$

Vậy $f(u, v, w) = (-4u + 8v - 43w, u - 3v + 18w)$, $\forall (u, v, w) \in R^3$

4.2.3. Mệnh đề:

Nếu $f \in L(V, W)$, $g \in L(W, U)$ và A, B, C là các cơ sở được sắp tương ứng của V, W, U thì

$$[g_o f]_A^C = [g]_B^C.[f]_A^B$$

Ví dụ

$$[g]_B^C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f]_A^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[g_o f]_A^C = [g]_B^C\ [f]_A^B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 21 & -23 \\ -2 & -20 \end{pmatrix}$$

4.2.4. Định lý:

Cho $f \in L(V, W)$, A và B tương ứng là cơ sở được sắp của V và W. Khi đó f khả nghịch nếu và chỉ nếu $[f]_A^B$ khả nghịch.

4.2.5. Mệnh đề:

Gọi $P \in M_n(K)$ là ma trận đổi cơ sở từ B sang B' trong V, $Q \in M_n(K)$ là ma trận đổi cơ sở từ C sang C' khi đó:

$$[f]_{B'}^{C'} = Q^{-1}\ [f]_B^C.P$$

Ví dụ:

$f : R^3 \to R^2$

$(u, v, w) \mapsto (5u + v - 7w, 4w - 8u + 3v)$

R^3 có hai cơ sở $B = B_o$ và $B' = \{c_1 = (1, 2, 2), c_2 = (2, 0, 3), c_3 = (2, 1, 3)\}$

R^2 có hai cơ sở $C = B_o$ và $C' = \{\varepsilon_1 = (4, -3), \varepsilon_2 = (5, 1)\}$

Viết $[f]_B^C$, rồi suy ra $[f]_{B'}^{C'}$

Giải:

* $[f]_B^C$

$f(\varepsilon_1) = f(1, 0, 0) = (5, -8)$

$f(\varepsilon_2) = f(0,1\ 0) = (1,3)$

$f(\varepsilon_{31}) = f(0\ 0, 1) = (-7, 4)$

$[f]_B^C = ([f(\varepsilon_1)]_C\ [f(\varepsilon_2)]_C\ [f(\varepsilon_3)]_C)$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$*P=P(B \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$*Q=P(C \to C') = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \frac{1}{|Q|}.C^T$$

$$[f]_{B'}^{C'} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -37 & 9 & -5 \\ 3 & -49 & -43 \end{pmatrix}$$

4.3. NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

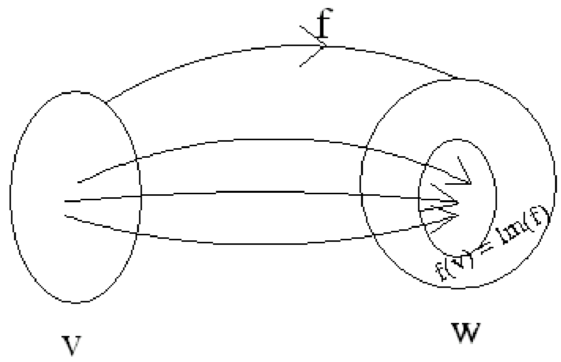
4.3.1. Mệnh đề:

Cho $f \in L(V,W)$. Khi đó:

i) Ký hiệu Im(f)=f(V)=không gian ảnh của ánh xạ tuyến tính f

= ảnh của toàn bộ V qua ánh xạ tuyến tính f

ii) Nếu a là một cơ sở của V thì f(a) là một tập sinh của Im(f) = f(V).



Từ tập sinh f(a) của Im(f), ta sẽ tìm ra một cơ sở của Im(f).

iii) Chọn K = $\{\theta\} \leq$ W thì $f^{-1}(K) \leq$ V

Ký hiệu ker(f) = $f^{-1}(\theta_W) = \{\alpha \in V / f(\alpha) = \theta_W\}$

Muốn tìm cơ sở cho ker(f) ta chỉ cần tìm cơ sở cho không gian lời giải (không gian nghiệm) của hệ phương trình tuyến tính f(x) = θ.

Ví dụ:

f: $R^4 \longrightarrow R^4$

$(u,v,w,t) \mapsto (u + 2v + 4w - 7t, -3u - 2v + 5t, 2u + v - w - 2t, 3u + v - 3w - t)$

Tìm cơ sở cho Im(f)

Chọn một cơ sở a tùy ý của R^4, chẳng hạn: ta chọn cơ sở chính tắc như sau:

$f(\varepsilon_1)$=f(1,0,0,0)=(1,-3,2,3); $f(\varepsilon_2)$=f(0,1,0,0)=(2,-2,1,1);

$f(\varepsilon_3)$=f(0,0,1,0)=(4,0,-1,-3); $f(\varepsilon_4)$=f(0,0,0,1)=(-7,5,-2,-1)

Ta sẽ đi tìm cơ sở từ một tập sinh:

Lập ma trận:

$$\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ -7 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận về dạng bậc thang

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ -7 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im(f) có một cơ sở là D={ γ_1 =(1,-3,2,3), γ_2 =(0,4,-3,5)}=>dimIm(f)=2

- Tìm một cơ sở cho không gian Ker(f)

Ker(f)={$\alpha \in R^4 \,/\, f(\alpha) = 0$}

Giải hệ phương trình f(α)=0 với α =(u, v, w, t)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 4w - 7t = 0 \\ -3u - 2v + 5t = 0 \\ 2u + v - w - 2t = 0 \\ 3u + v - 3w - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nghiệm w, t $\in$ R tùy ý, u = 2w – t, v = 4t – 3w

Cho w = 1, t = 0 ta có λ_1 = (2, -3, 1, 0)

Cho w = 0, t = 1 ta có λ_2 = (-1, 4, 0, 1)

Vậy Ker(f) có cơ sở là C = { λ_1 = (2, -3, 1, 0), λ_2 = (-1, 4, 0, 1)} => dimIm(f) = 2

4.3.2. Mệnh đề:

f đơn ánh nếu và chỉ nếu ker(f) = 0.

4.3.3. Định lý:

Khi V=V^n thì dimV=dimIm(f)+dimKer(f)=n

4.4. TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

Một ánh xạ tuyến tính từ V vào chính nó được gọi là một tóan tử tuyến tính (hay một phép biến đổi tuyến tính, hay một tự đồng cấu tuyến tính) trên V. Tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính trên V được ký hiệu là L(V).

❖ BÀI TẬP CỦNG CỐ:

4.1. Cho K là trường con của trường số phức C và f là ánh xạ từ K^3 sang K^3 được định nghĩa bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, x_1 - 3x_2 + 8x_3)$$

a) Kiểm chứng f là ánh xạ tuyến tính.

b) Nếu x = (a,b,c) là một véctơ của K^3, tìm điều kiện trên a,b,c sao cho $x \in$ Im(f), hạng của f ?

c) Tìm điều kiện trên a,b,c để $x \in$ Ker(f). Xác định không gian Ker(f).

4.2. Tìm một ánh xạ tuyến tính f từ R^3 đến R^3 có Im(f) là $\langle\{(1,0,-1),(2,1,2)\}\rangle$.

4.3. f là toán tử tuyến tính trên R^3 với:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_1 + x_2 - x_3).$$

a) f khả nghịch hay không ? Tìm f^{-1}, nếu có.

b) Chứng minh $(f^2 - I)(f - 2I) = 0$

4.4. Cho f là ánh xạ tuyến tính từ R^3 sang R^2 được định nghĩa bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$$

a) Ma trận biểu diễn của f đối với 2 cơ sở chính tắc B_0 (của R^3) và B'_0 (của R^2)là gì?

b) Với cặp cơ sở B = $\{b_1,b_2,b_3\}$ và B' = $\{c_1,c_2\}$, trong đó b_1 = (1,0,-1), b_2 = (1,1,0), b_3=(1,0,0), c_1 = (1,1), c_2 = (1,0), thì ma trận biểu diễn của f đối với B, B' là gì ?

4.5. Cho f là toán tử tuyến tính trên R^3 có ma trận biểu diễn đối với cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tìm một cơ sở cho Im(f) và một cơ sở cho ker(f).

4.6. Trong không gian R^3 cho các vectơ u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 0). Gọi f là toán tử tuyến tính trên R^3 định bởi: f(x, y, z) = (x – y, y – z, z – x)

a) Chứng tỏ $B_1 = \{u_1,u_2,u_3\}$ là cơ sở của R^3. Xác định ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang cơ sở chính tắc B_0 của R^3.

b) Tìm ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở B_0, B_1.

c) Cho u=(1,2,3). Hãy tìm tọa độ của u và f(u) theo cơ sở B_1.

d) Tìm cơ sở và số chiều của Im(f), ker(f). Ánh xạ f có song ánh hay không? Giải thích?

4.7. Trong không gian R^3 cho các vectơ u_1= (1,0,1) , u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1). Gọi f là toán tử tuyến tính trên R^3 định bởi f(x, y, z) = ((m + 2)x + 3y + 2z, x + my + z, x + y + z)

a) Chứng tỏ $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của R^3. Xác định ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang cơ sở chính tắc B_o của R^3.

b) Tìm ma trận biểu diễn của f theo cơ sở B_1

c) Cho u = (1,-1,1). Hãy tìm tọa độ của u và f(u) theo cơ sở B_1.

d) Định m để f là một song ánh. Với m=0 hãy tìm cơ sở cho Im(f), ker(f).

4.8. Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \to R^3$ có: B = {a_1 = (1,1,1), a_2 = (0,1,1), a_3 = (0,0,1)} là một cơ sở của R^3 và $f(a_1)$ = (2,5,12); $f(a_2)$ = (1,3,7); $f(a_3)$ = (-1,0,-1).

a) Xác định biểu thức của ánh xạ f.

b) Tìm cơ sở và số chiều của Im(f), ker(f).

4.9. Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \to R^3$ phụ thuộc tham số $m \in R$ có B ={a_1 = (1,-2,1), a_2 = (2,1,0), a_3 =(1,0,0)} là một cơ sở của R^3 và $f(a_1)$=(m + 1,5–m, 2m -5); $f(a_2)$=(2m+1, m–1, 2m + 1); $f(a_3)$=(m+1,m–2, m+2).

a) Xác định biểu thức của ánh xạ f

b) Định m để f là song ánh

c) Với m = 4, hãy tìm cơ sở và số chiều của Im(f), Ker(f).

Chương 5

CÁC DẠNG CHÍNH TẮC CỦA MA TRẬN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong chương này, người học có thể:
- Nhận diện tóan tử và ma trận chéo hóa

5.1. ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG

5.1.1. Định nghĩa:

Cho $A \in M_n(K)$. Ta gọi đa thức đặc trưng của A là đa thức $p_A(x)=\det(xI_n - A)$.

Ta thấy $p_A(x)$ là một đa thức bậc n trên K.

Ví dụ 1:

Nếu $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ thì $p_A(x)=\det(xI_3-A) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ -2 & x-2 & 0 \\ -3 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 7x - 8$.

5.1.2. Định nghĩa:

Cho f là một toán tử tuyến tính trên không gian V hữu hạn chiều. Ta gọi đa thức đặc trưng của f là đa thức bậc n:

$p_f(x) = \det(xI_n - A) = f_A(x)$

với A là một ma trận biểu diễn f đối với một cơ sở B nào đó của V.

Ví dụ 2:

Cho f là một toán tử tuyến tính trên R^3 xác định bởi:

$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2)$.

$A = [f]_{B_o} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ nên đa thức đặc trưng của f là:

$p_f(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$.

5.2. TRỊ RIÊNG, VECTƠ RIÊNG CỦA TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN VUÔNG:

5.2.1. Định nghĩa:

Cho $f \in L(V)$ và $c \in K$

Đặt $E_c = \{\alpha \in V/\ f(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \in V/\ f(\alpha) - cId_V(\alpha) = 0\} = \{\alpha \in V/\ (f - cId_V)(\alpha) = 0\}$

Vậy $E_c = Ker(f - cId_V)$ và $E_c \le V$ (không gian con)

Khi đó:

- Nếu $E_c \neq \{0\}$ thì ta nói c là một trị riêng (trên K) của f.
- E_C là không gian riêng của f tương ứng với trị riêng c.
- Mỗi $\alpha \in E_c \setminus \{0\}$ gọi là vectơ riêng của f ứng với trị riêng c.

Ta có:

$$f(E_c) = \begin{cases} E_c & \text{nếu } c \neq 0 \\ \{0\} & \text{nếu } c = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3:

Tiếp theo ví dụ 2, ta có $p_f(x) = (x-1)(x-2)^2$

Phương trình $p_f(x)=0$ có 2 nghiệm x=1 và x=2

Ta có:

$E_2 = \{X \in R^3 / (f - 2Id_V)(X) = 0\}$

E_2 là không gian nghiệm của hệ phương trình $([f]_{Bo} - 2I_3)X = 0$

$$[f]_{Bo} - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 \in R$ tùy ý, $x_2 = \frac{1}{2}x_3$, $x_1 = \frac{1}{2}x_3$

$E_2 = \{(\frac{1}{2}x_3, \frac{1}{2}x_3, x_3) | x_3 \in R\} \neq \{0\}$

Vậy:

c = 2 là một trị riêng của f

E_2 là không gian riêng tương ứng với trị riêng là 2

Cho $x_3 = 2$ ta có $\gamma = (1, 1, 2)$ là vectơ riêng tương ứng với trị riêng là 2

5.2.2. Định nghĩa:

Cho $A \in M_n(K)$ và $c \in K$.

Đặt $E_c = \{X \in K^n / AX^T = cX^T\} = \{X \in K^n / (A - cI_n)X^T = 0\}$

Khi đó:

- Nếu $E_c \neq \{0\}$ thì ta nói c là một trị riêng (trên K) của ma trận A.
- E_C là không gian riêng của ma trận A tương ứng với trị riêng c.
- Mỗi $\alpha \in E_c \backslash \{0\}$ gọi là vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng c.

Ví dụ:

Cho A = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(Q)$

Đa thức đặc trưng $p_A(x) = |xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x-5 & -6 \\ -1 & x-6 \end{vmatrix} = (x-3)(x-8)$

Ta có:

$E_3 = \{X \in Q^2 / (A - 3I_2)X^T = 0\}$

Giải hệ $(A - 3I_2)X^T = 0$

$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -3a \end{cases}$

$E_3 = \{X = (-3a, a) | a \in Q\} \neq \{0\}$

Vậy: c = 3 là một trị riêng của A trên Q

E_3 là không gian riêng của A ứng với trị riêng 3

Cho a = 1 ta có $X_1 = (-3, 1)$ là một vectơ riêng của A ứng với trị riêng 3

5.3. TOÁN TỬ VÀ MA TRẬN VUÔNG CHÉO HÓA:

5.3.1. Định nghĩa:

Cho $f \in L(V_n)$ và $A \in M_n(K)$

(i) Toán tử f chéo hóa được (trên K) nếu có cơ sở

A = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ của V_n sao cho

$[f]_a = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$ là ma trận đường chéo ($c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$)

Suy ra: $f(\alpha_1) = c_1\alpha_1$, $f(\alpha_2) = c_2\alpha_2$, …, $f(\alpha_n) = c_n\alpha_n$, nghĩa là a = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$gồm các vectơ riêng của f ứng với các trị riêng $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

(ii) Ma trận vuông chéo hóa được nếu tồn tại $P \in M_n(K)$ khả nghịch thỏa

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$ là ma trận đường chéo ($c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$)

Ví dụ:

(i) $f: V_3 = R_2[x] \to V_3 = R_2[x]$

$\varphi(x) \mapsto 2x\varphi'(x) + 5\varphi(x)$

Xét cơ sở $a = \{1, x, x^2\}$ của V_3

$f(1) = 2x(1)' + 5(1) = 5(1) + 0x + 0x^2$

$f(x) = 2x(x)' + 5x = 0(1) + 7x + 0x^2$

$f(x^2) = 2x(x^2)' + 5x^2 = 0(1) + 0x + 9x^2$

Ta có: $[f]_a = ([f(1)]_a \ [f(x)]_a \ [f(x^2)]_a) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Vậy: f chéo hóa được trên R

(ii) Cho $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix} \in M_3(R)$

$Q = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Đặt $P = Q^{-1}$ thì $P^{-1} = Q$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy : A chéo hóa được trên R

5.3.2. Định lý *(nhận diện tóan tử và ma trận vuông chéo hóa được)*

a) Cho $f \in L(V_n)$. Ta nói:

(i) f chéo hóa được (trên K) khi và chỉ khi

$\begin{cases} \bullet\ p_f(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\ldots(x-c_m)^{r_m} \text{ với } c_1, c_2, \ldots, c_m \in K\text{\_trị riêng} \\ (p_f(x) \text{ tách được trên K}) \\ \bullet\ \dim E_{c_j} = r_j,\ (1 \le j \le m) \end{cases}$

(ii) f không chéo hóa được (trên K) khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l} p_f(x) \text{ không tách được trên K} \\ \exists\, k \in \{1, \ldots, m\} \text{ sao cho } \dim E_{c_k} < r_k \end{array}\right.$

b) Cho A ∈ $M_n(K)$. Ta có:

(i) A chéo hóa được (trên K) khi và chỉ khi

$\begin{cases} \bullet\ p_A(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\ldots(x-c_m)^{r_m} \text{ với } c_1, c_2, \ldots, c_m \in K\text{\_trị riêng} \\ (p_A(x) \text{ tách được trên K}) \\ \bullet\ \dim E_{c_j} = r_j,\ (1 \le j \le m) \end{cases}$

(ii) A không chéo hóa được (trên K) khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l} p_A(x) \text{ không tách được trên K} \\ \exists\, k \in \{1, \ldots, m\} \text{ sao cho } \dim E_{c_k} < r_k \end{array}\right.$

5.3.3. Thực hành *(Ma trận chéo hoá)*

a) Cho f ∈ L(V_n)

- Tìm $p_f(x) = \det(xI_n - [f]_\delta)$ (δ là cơ sở của V_n)
- Nếu $p_f(x)$ không tách được trên K thì f không chéo hoá được.
- Giả sử $p_f(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\cdots(x-c_n)^{r_n}$ (tách được trên K).
- Tìm cơ sở a_j cho $E_{c_j} = \ker(f - c_j Idv_n)$; $1 \le j \le n$
- Nếu ∃k ∈ {1,2,. . . . ,m} mà $\dim_K E_{c_k} < r_k$ thì f không chéo hoá được trên K.
- Nếu $\dim_F E_{c_j} = r_j$ $(1 \le j \le m)$ thì f chéo hoá được trên K.
- Lập $a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_m$ (giữ nguyên thứ tự của các véctơ) thì a là một cơ sở của V_n và:

$$[f]_a = \begin{pmatrix} c_1 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & c_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_m \\ O & & & & & \ddots & c_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \} r_1 \text{ lần} \\ \\ \\ \\ \} r_m \text{ lần} \end{matrix}$$

b) Cho $A \in M_n(K)$

- Tìm đa thức đặc trưng: $p_A(x) = \det(xI_n - A)$.
- Nếu $p_A(x)$ không tách được thì A không chéo hoá được.
- Nếu $p_A(x) = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_n)^{r_n}$ (tách được trên K).
- Tìm cơ sở a_j cho $E_{c_j} = \{X \in K_n / (A - c_jI_n) X^T = 0\}$
- Nếu $\exists k \in \{1, \ldots, m\}$ sao cho $\dim_F E_{c_k} < r_k$thì A không chéo hoá được.
- Nếu $\dim_F E_{c_j} = r_j$ ($1 \le j \le m$) thì A chéo hoá được trên K
- Lập $a^K = \bigcup_{i=1}^{m} a_i$ (giữ nguyên thứ tự các véctơ) thì a là một cơ sở của K_n.

Đặt $P = P(\beta_0 \to a)$ (β_0 là cơ sở chính tắc của K^n)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c_1 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & c_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_m \\ O & & & & & \ddots & c_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \} r_1 \text{ lần} \\ \\ \\ \\ \} r_m \text{ lần} \end{matrix}$$

Ví dụ:

a) $f \in L(R_3)$ có $p_f(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ không tách được trên R (vì $\Delta < 0$).

b) $A \in M_4(Q)$ có $p_A(x) = x^4 - 11x^2 + 18 = (x^2 - 9)(x^2 - 2)$

$= (x + 3)(x - 3)(x^2 - 2)$ không tách được trên Q

Vậy A không chéo hoá được trên Q

Xem K = R thì $p_A(x) = (x + 3)(x - 3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ tách được trên R

Vậy A chéo hoá được trên R (vì các nghiệm đều đơn)

c) $f \in L(R^3)$, $f: R^3 \to R^3$

$(u,v,w) \mapsto (3v - u - w, 5v - 3u - w, 3v - 3u + w)$

$$[f]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_f(x) = \det(xI_3 - [f]_{\beta o}) = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 1 \\ 3 & x-5 & 1 \\ 3 & -3 & x-1 \end{vmatrix} \xlongequal{d_2 = d_2 - d_3} \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 1 \\ 0 & x-2 & 2-x \\ 3 & -3 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 = c_3 + c_2} \begin{vmatrix} x+1 & -3 & -2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 3 & -3 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 3 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-1)$$

Vậy $p_f(x)$ tách được trên R ($c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$)

* Tìm cơ sở a_2 cho $E_{c_2} = E_2 = \ker(f - 2Id_{R^3})$

$(u,v,w) \in E_2 \Leftrightarrow (f - 2Id_{R^3})(u,v,w) = 0$

$\Leftrightarrow f(u,v,w) - 2Id_{R^3}(u,v,w) = 0$

$\Leftrightarrow (3v - 3u - w, 3v - 3u - w, 3v - 3u - w) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nghiệm: v = a, w = 3b, u = a – b, a,b $\in$ R

Cho a = 1, b = 0, ta có véctơ nghiệm $\alpha_1 = (1,1,0)$

Cho a = 0, b = 1, ta có véctơ nghiệm $\alpha_2 = (-1,0,3)$

$\Rightarrow E_2$ có cơ sở $a_2 = \{\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (-1,0,3)\}$ và $\dim_R E_2 = 2 = r_2$

* Tìm cơ sở a_1 cho $E_{c_1} = E_1 = (f - Id_{R^3})$

$(u,v,w) \in E_1 \Leftrightarrow (f - Id_{R^3})(u,v,w) = 0$

$\Leftrightarrow (-2u + 3v - w, -3u + 4v - w, -3u + 3v) = (0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nghiệm: u = a, v = a, w = a

Cho a = 1 ta có véctơ nghiệm $\alpha_3 = (1,1,1)$

$\Rightarrow E_1$ có cơ sở $a_1 = \{\alpha_3 = (1,1,1)\}$ và $\dim_R E_1 = 1 = r_1$

$$\text{Vậy:}\quad \left.\begin{array}{l} p_f(x) = (x-2)^2(x-1) \\ \dim_R E_1 = 1 = r_1 \\ \dim_R E_2 = 2 = r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f chéo hoá được trên R}$$

Đặt $a = a_2 \cup a_1 = \{\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (-1,0,3), \alpha_3 = (1,1,1)\}$ thì a là một cơ sở của R^3 và:

$$[f]_a = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} \text{ 2 lần} \\ \\ \} \text{ 1 lần} \end{array}$$

d) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(Q)$$

$$* \ p_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-5 & -6 & 3 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & -6 & 3 \\ 0 & x-2 & x-2 \\ -1 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & -6 & 9 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & -2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} x-5 & 9 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)^3$$

tách được trên R, $c_1 = 2$, $r_1 = 3$

* Tìm cơ sở a_1 cho $E_{c_1} = E_2 = \{X \in Q \,/\, (A - 2I_3)X^T = 0\}$

Giải hệ $(A - 2I_3)X^T = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nghiệm $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_1 = b - 2a$, $a,b \in Q$ tuỳ ý.

Chọn a = 1, b = 0 có véctơ nghiệm $\alpha_1 = (-2,2,0)$

a = 0, b = 1 có véctơ nghiệm $\alpha_2 = (1,0,1)$

$\Rightarrow E_1$ có cơ sở $a_1 = \{\alpha_1 = (-2,2,0), \alpha_2 = (1,0,1)\}$ và $\dim_Q E_2 = 2 < r_1 = 3$

Kết luận: A không chéo hoá được trên Q.

5.3.4. Hệ quả:

Cho $f \in L(V_n)$ và $A \in M_n(K)$. Nếu $p_f(x)$ (hoặc $p_A(x)$) tách được và chỉ có nghiệm đơn trên K thì f (hoặc A) chéo hoá được trên K.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$

A có chéo hoá được trên R không? (nếu có tìm P khả nghịch $\in M_3(R)$ để $P^{-1}AP$ là ma trận chéo)

* $p_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-7 & 12 & 2 \\ -3 & x+4 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x-7)(x+4)(x+2) - 4(x+4) + 36(x+2)$

$= x(x + 1)(x - 2)$ tách được trên R và chỉ có nghiệm đơn.

Vậy A chéo hóa được trên R

($c_1 = 0$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$)

Tìm cơ sở a_1 cho $E_{c_1} = E_0 = \{X \in R^3 \mid (A - 0I_3) X^T = 0\}$

Giải hệ $(A - 0I_3) X^T = 0$ có được cơ sở không gian nghiệm: $a_1 = \{\alpha_1 = (4, 3, -4)\}$

Tìm cơ sở a_2 cho $E_{C_2} = E_{-1} = \{X \in R^3 \mid (A + I_3) X^T = 0\}$ được $a_2 = \{ \alpha_2 = (1,1,-2)\}$

Tìm cơ sở a_3 cho $E_{C_3} = E_2 = \{X \in R^3 \mid (A - 2I_3) X^T = 0\}$ được $a_3 = \{\alpha_3 = (2,1,-1)\}$

Đặt $a = a_1 \cup a_2 \cup a_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ thì a là cơ sở của R^3

Đặt $P = P(\beta_0 \to a) = \left(\{\alpha_1\}_{\beta_0} \{\alpha_2\}_{\beta_0} \{\alpha_3\}_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Thì $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.3.5. Ứng dụng: *(luỹ thừa ma trận chéo hóa được trên K)*

Cho $A \in M_n(K)$ chéo hóa được trên K. Ta tìm được P

$P \in M_n(K)$, P khả nghịch mà $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = P\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

do đó $A^k = \left[p\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}p^1 \right]^k = P\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^k P^{-1}$

$[PHP^{-1}]^k = PH^kP^{-1}\ \forall k \geq 1$

$$A^k = P\begin{pmatrix} c_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

Ví dụ: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$

$$A^{200} = P\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}^{200} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 2^{200} \end{pmatrix}P^{-1}$$

❖ BÀI TẬP CỦNG CỐ

5.1. Tìm trị riêng và cơ sở, số chiều cho không gian riêng của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.2. Chứng tỏ các ma trận sau không chéo hóa được.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$.

5.3. Trong các ma trận sau ma trận nào chéo hóa được? Giải thích? Trong trường hợp chéo hóa được hãy tìm dạng chéo hóa tương ứng.

(a) $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 24 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.4. Cho $f \in L(R^3)$, tìm đa thức đặc trưng , trị riêng, vectơ riêng của f, f có chéo hóa được hay không?

a) $\forall(u, v, w) \in R^3$, $f(u, v, w) = (13u + 2v - 8w, 6u + 2v - 4w, 18u + 3v - 11w)$

b) $\forall(u, v, w) \in R^3$, $f(u, v, w) = (4w - 2v - u, 2v - 2u + 2w, 4u - w + 2v)$

c) $\forall(u, v, w) \in R^3$, $f(u, v, w) = (u - 2v - 2w, 4u + 4v - 4w, u - v - 2w)$.

5.5. Cho $A \in M_3(R)$. Chứng minh A chéo hóa được (hoặc không chéo hóa được) trên R. Nếu A chéo hóa được thì chỉ ra ma trận khả nghịch $P \in M_3(R)$ thỏa $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo rồi tính A^{2000} bằng 2 phép tóan nhân ma trận

a) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

Chương 6

KHÔNG GIAN EUCLIDE

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong chương này, người học có thể:
- Nhận diện không gian Euclide
- Tìm cơ sở trực giao và trực chuẩn

6.1. ĐỊNH NGHĨA KHÔNG GIAN EUCLIDE

6.1.1. Tích vô hướng (tích trong)

Một tích vô hướng trên V là một ánh xạ

$$\varphi : \text{VxV} \longrightarrow \text{R}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \varphi(\alpha, \beta) = \langle \alpha \mid \beta \rangle$$

thỏa các điều kiện:

(i) $\langle \alpha \mid \alpha \rangle \geq 0, \forall \alpha \in V$ (dấu "=" chỉ xảy ra khi $\alpha = 0$)

(ii) $\langle c\alpha \mid \beta \rangle = c\langle \alpha \mid \beta \rangle, \forall c \in R, \alpha, \beta \in V$

(iii) $\langle \alpha + \alpha' \mid \beta \rangle = \langle \alpha \mid \beta \rangle + \langle \alpha' \mid \beta \rangle, \forall \alpha, \alpha', \beta \in V$ (tuyến tính trái)

(iv) $\langle \alpha \mid \beta \rangle = \langle \beta \mid \alpha \rangle, \forall \alpha, \beta \in V$

Ghi chú: nếu $\langle | \rangle$ là tích vô hướng trên V thì

$\langle 0 \mid \alpha \rangle = \langle \alpha \mid 0 \rangle = 0, \forall \alpha \in V$

$\langle | \rangle$ tuyến tính phải (do (iii)).

6.1.2. Không gian Euclide: là không gian vectơ thực có trang bị một tích vô hướng nào đó.

Ví dụ:

V = R^n, $\forall \alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in R^n$

Đặt $\langle \alpha \mid \beta \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ thì $\langle \mid \rangle$ là tích vô hướng trên R^n (gọi là tích vô hướng thông thường hoặc tích vô hướng tiêu chuẩn).

6.1.3. Độ dài vectơ – không gian hai vectơ.

Cho $\alpha, \beta \in V$

(i) Đặt $\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$ độ dài của α

Vậy $\|\alpha\| \geq 0$, α = 0 => $\|\alpha\|$ = $\|0\|$ = 0

$\alpha \neq$ 0 => $\|\alpha\|$ > 0.

(ii) Khoảng cách giữa α, β là: d(α, β) = $\|\alpha - \beta\|$

Ví dụ:

(i) α = (-2, 3, 6, 0) $\in$ R^4

$\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$ = $\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2 + 0^2}$ = 7

(ii) β = (1, -5, 6, 4), γ = (3, 0, 7, -2) $\in$ R^4

$\|\beta - \gamma\| = d(\beta, \gamma) = \|(-2, -5, -1, 6)\| = \sqrt{66}$

❖ Tính chất:

(i) $\|c\alpha\| = |c|.\|\alpha\|$

(ii) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ (bất đẳng thức tam giác, dấu "=" chỉ xảy ra khi α, β cùng phương, cùng chiều)

(iii) $|\langle\alpha|\beta\rangle| \leq \|\alpha\|.\|\beta\|$ (dấu "=" chỉ xảy ra khi α, β cùng phương)

6.2. CƠ SỞ TRỰC GIAO VÀ TRỰC CHUẨN:

6.2.1. Ký hiệu: Cho $\varnothing \neq$ A, B $\subset$ V, $\alpha \in$ V.

(a) A + B = $\{(\gamma + \delta) / \gamma \in A, \delta \in B\}$;

(b) $\langle A|B\rangle = \{\langle\gamma|\delta\rangle / \gamma \in A, \delta \in B\}$;

$\langle\alpha|B\rangle = \{\langle\alpha|\delta\rangle / \forall\delta \in B\}$

(c) Ta nói $\gamma \perp \delta$ nếu $\langle\gamma|\delta\rangle = 0$

$\gamma \perp B$ nếu $\langle\alpha|B\rangle = \{0\}$ ($\alpha \perp \beta, \forall\beta \in B$)

$A \perp B$ nếu $\langle A|B\rangle = \{0\}$ $(\gamma \perp \delta, \forall\gamma \in A, \forall\delta \in B)$

(d) $A^{\perp} = \{\gamma \in V / \gamma \perp A\}$ $(\langle\gamma|A\rangle = \{0\})$, ta có $A^{\perp} \leq V$

6.2.2. Định nghĩa:

Cho $\varnothing \neq A \subset V$.

(a) Ta nói A trực giao nếu với mọi $\alpha, \beta \in A : \alpha \perp \beta \quad (\alpha \perp \beta)$

(b) Ta nói A trực chuẩn nếu A trực giao và $\forall \alpha \in A : \|\alpha\| = 1$.

6.2.3. Mệnh đề:

Cho $\varnothing \neq S \subset V$.

(a) Nếu S trực giao và $\varnothing \notin S$ thì S độc lập tuyến tính.

(b) Nếu S trực chuẩn thì S độc lập tuyến tính.

(c) $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ trực giao. Khi đó: $\|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n\|^2 = \|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \ldots + \|\alpha_n\|^2$

(định lý Pitago mở rộng)

Ví dụ:

(a) $V = R^4$, $S = \{\alpha_1 = (3, 6, 2, 1),\ \alpha_2 = (-6, 2, 3, 0),\ \alpha_3 = (2, -3, 6, 0)\} \subset V$

Ta có: $\alpha_1 \perp \alpha_2, \alpha_2 \perp \alpha_3, \alpha_3 \perp \alpha_1$ nên S trực giao và S độc lập tuyến tính (do $0 \notin S$)

$\|\alpha_1\| = 5\sqrt{2}, \quad \|\alpha_2\| = \|\alpha_3\| = 7$

=> $T = \left\{\gamma_1 = \dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \gamma_2 = \dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \gamma_3 = \dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}\right\}$ trực chuẩn

$(\gamma_1 \perp \gamma_2, \gamma_2 \perp \gamma_3, \gamma_1 \perp \gamma_3; \|\gamma_1\| = \|\gamma_2\| = \|\gamma_3\| = 1)$

(b) $\int_0^{2\pi} (2\sin 3x - 7\cos x + 5\cos 4x - 4\sin 5x)^2 dx = \|2\sin 3x + (-7\cos x) + 5\cos 4x + (-4\sin 5x)\|^2$

$= \|2\sin 3x\|^2 + \|-7\cos x\|^2 + \|5\cos 4x\|^2 + \|-4\sin 5x\|^2$

$= 4\int_0^{2\pi} \sin^2 3x dx + 49\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx + 25\int_0^{2\pi} \cos^2 4x dx + 16\int_0^{2\pi} \sin^2 5x dx = 94\pi$

6.2.4. Trực giao hóa, trực chuẩn hóa một cơ sở

Quá trình trực chuẩn hóa Gram – Schmidt

Bước 1: Chọn $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở bất kỳ của không gian có tích vô hướng hữu hạn chiều V với dimV = n.

Bước 2: Xây dựng cơ sở trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ của V như sau:

$$v_1 = u_1;$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 | v_1 \rangle}{\langle v_1 | v_1 \rangle} v_1;$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3 | v_1 \rangle}{\langle v_1 | v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3 | v_2 \rangle}{\langle v_2 | v_2 \rangle} v_2$$

……………………………………….

$$v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n | v_i \rangle}{\langle v_i | v_i \rangle} v_i.$$

Bước 3: Xây dựng cơ sở trực chuẩn $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ của V bằng cách chuẩn hoá các vectơ trực giao đã xây dựng trong bước 2 như sau:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}; w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}; \ldots; w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

Ví dụ:

V = R^3 có cơ sở a = $\{\alpha_1 = (1, 1, 1),\ \alpha_2 = (-1, 2, -3),\ \alpha_3 = (0, 1, -2)\}$

Đặt $\beta_1 = \alpha_1 = (1,1,1)$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2 | \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1 | \beta_1 \rangle} \beta_1 = (-1,2,-3) - \frac{(-2)}{3}(1,1,1) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{-7}{3} \right)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3 | \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1 | \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3 | \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2 | \beta_2 \rangle} \beta_2 = (0,1,-2) - \frac{(-1)}{3}(1,1,1) - \frac{\frac{22}{3}}{\frac{114}{9}} \left(\frac{-1}{3}, 8, -7 \right) \frac{1}{3} = \frac{1}{19}(10,-4,-6)$$

Vậy B = $\left\{ \beta_1 = (1,1,1),\quad \beta_2 = \frac{1}{3}(1,8,-7),\quad \beta_3 = \frac{1}{19}(10,-4,-6) \right\}$ là cơ sở trực giao của R^3

Đặt C = $\left\{ \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{114}}(-1,8,-7),\quad \gamma_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{1}{\sqrt{38}}(5,-2,-3) \right\}$ là cơ sở trực chuẩn của R^3.

6.2.5. Định lý:

Cho không gian Euclide V và $W_m \le V$ ($\dim_R W_m = m$). Xét a = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$là một cơ sở trực chuẩn (tùy ý) của W_m.

Ta có: $W_m^{\perp} = \{\alpha \in V / \alpha \perp W_m\}$

(a) $V = W_m \oplus W_m^{\perp}$

(b) $\forall\ \alpha \in V, \exists!\ \alpha' \in W_m, \alpha'' \in W_m^{\perp}$ thỏa $\alpha = \alpha' + \alpha''$

Trong đó: $\alpha' = \langle\alpha|\alpha_1\rangle\alpha_1 + \langle\alpha|\alpha_2\rangle\alpha_2 + \ldots + \langle\alpha|\alpha_m\rangle\alpha_m$ (độc lập với cơ sở trực chuẩn a)

Và $\alpha'' = \alpha - \alpha'$

(c) Suy ra nếu $V = V_n$ thì $\begin{cases} V_n = W_m \oplus W_m^{\perp} \\ \dim_R W_m^{\perp} = n - m \end{cases}$

Ví dụ:

$V = R^4$, $W_2 \leq V$ và W_2 có cơ sở

$\beta = \{\beta_1 = (1,-1,2,3), \beta_2 = (3,2,-4,1)\}$

Tìm cơ sở D cho không gian $W_2^{\perp} = \{\alpha \in R^4/\alpha \perp W_2\}$ ta có $\alpha \perp W_2 \Leftrightarrow \alpha \perp$ cơ sở β $\Leftrightarrow \alpha \perp \beta_1$ và $\alpha \perp \beta_2$

(nếu $\alpha \perp W_2$ thì hiển nhiên $\alpha \perp \beta_1$ và $\alpha \perp \beta_2$. Nếu $\alpha \perp \beta_1$ và $\alpha \perp \beta_2$ thì $<\alpha/\beta_1>=0=<\alpha/\beta_2>$)

=> $<\alpha/c_1\beta_1 + c_2\beta_2> = 0\ \forall\ c_1c_2 \in R$

=> $\alpha \perp \beta_2$ (vì $W_2 = \{\beta= c_1\beta_1 + c_2\beta_2/c_1c_2 \in R\}$)

Vậy $W_2^{\perp} = \{\alpha = (u,v,w,t) \in R^4/\ \alpha \perp \beta_1 \wedge \alpha \perp \beta_2\}$

$= \{\alpha = (u,v,w,t) \in R^4/ <\alpha/\beta_1> = <\alpha/\beta_2> = 0\}$

$= \left\{ \alpha = (u,v,w,\tau)\ R^4 / \begin{cases} u - v + 2w + 3t = 0 \\ 3u + 2v - 4w + t = 0 \end{cases} \right\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{8}{5} & 0 \end{array}\right)$$

nghiệm: $\begin{cases} w,t & \text{tùy ý} \\ u & = -\frac{7}{5}t \\ v & = 2w + \frac{8}{5}t \end{cases}$

Cho w = 1, t = 0 ta có véctơ nggiệm $\gamma_1 = (0,2,1,0)$

t = 1, w = 0 ta có véctơ nghiệm $\gamma_2 = \left(-\frac{7}{5}, \frac{8}{5}, 0, 1\right)$

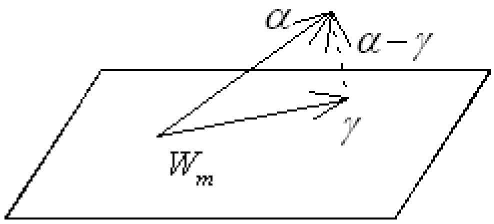
=> $W_2^{\perp}$ có cơ sở = $\{\gamma_1 = (0,2,1,0), \gamma_2 = \left(-\frac{7}{5}, \frac{8}{5}, 0, 1\right)\}$

$V = R^4 = W_2 \oplus W_2^{\perp}$

6.2.6. Bài toán cực tiểu hóa:

a/ Vấn đề: Cho $W_m \le V$ với V là không gian Euclide. Cho trước $\alpha \in V$. Ta muốn tìm $\beta \in W_m$ sao cho $\| \alpha - \beta \| = \min \{\| \alpha - \beta \| / \gamma \in W_m \}$

b/ Giải quyết Ta có: V = $W_m \oplus W_m^{\perp}$



Phân tích: $\alpha = \alpha' + \alpha''$

Trong đó $\alpha' = \sum_{j=1}^{m} < \alpha / \alpha_j > \alpha_j$

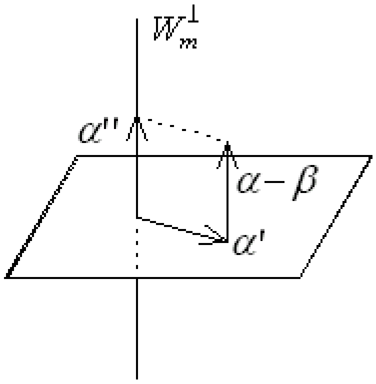
Và a = { $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ } là

Cơ sở trực chuẩn tùy ý của W_m

Đặt $d(\alpha, W_m) = \|\alpha - \beta\|$: k/c từ α đến W_m

$\alpha' = pr\alpha_{Wm}$

Bài toán cực tiểu hóa có nghiệm duy nhất



$\beta = \alpha' = pr_{Wm}\alpha$

và $\|\alpha - \beta\| = \min \{\|\alpha - \gamma\| \mid \gamma \in W_m\}$

Ví dụ:

$V = R^3$

W_2 có cơ sở a = $\{\alpha_1 = (-3,1,2), \alpha_2 = (1,-1,4)\}$. Xét $\alpha = (1, 1, 1) \in V$. Tìm $pr_{w_2}\alpha$ và d(α ,w_2)

Trực chuẩn hóa cơ sở a

$\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2 | \beta_1 \rangle}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 = (1, -1, 4) - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$= (1, -1, 4) - \frac{2}{7}(-3, 1, 2) = \frac{1}{7}(13, -9, 24)$

=> $\beta = \{\beta_{12} = (-3,1,2), \beta_2 = 7\beta_2' = (13,-9,24)\}$ là cơ sở trực giao của W_2.

=> $E = \left\{\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}\right\} = \left\{\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,1,2), \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{826}}(13,-9,24)\right\}$

$Pr_{w_2}\alpha = \alpha' = < \alpha / \gamma_1 > \gamma_1 + < \alpha / \gamma_2 > \gamma_2$

$$= \frac{1}{14}\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle (-3,1,2) + \frac{1}{826}\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 13 \\ -9 \\ 24 \end{matrix} \right\rangle (13,-9,24) = \frac{28}{826}(13,-9,24) = \frac{14}{413}(13,-9,24)$$

$$= \frac{28}{826}(13,-9,24) = \frac{14}{413}(13,-9,24)$$

$d(\alpha, W_2) = \|\alpha - \beta\| = \|\alpha - \Pr_{W_2}\alpha\|$

$$= \left\|(1,1,1) - \frac{14}{413}(13,-9,24)\right\|$$

$$= \frac{1}{413}\|(413,413,413) - (182,-126,336)\|$$

$$= \frac{1}{413}\|(231,539,77)\| = \frac{1}{413}\sqrt{231^2 + 539^2 + 77^2}$$

❖ BÀI TẬP CỦNG CỐ

6.1. Xét không gian Euclide R^4. Hãy xác định hình chiếu $pr_W u$ và khoảng cách d(u,w) trong mỗI trường hợp sau:

a) u = (4, -3, -1, 4) và W là không gian lời giải của hệ phương trình tuyến tính AX = 0 với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

b) u = (4, 2, -5, 1) và W là không gian lời giải của hệ phương trình tuyến tính AX = 0 với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c) u = (1, 1, 1, 1) và W = <S> với S = {(1, 1, -1, -2); (5, 8, -2, -3); (3, 9, 3, 8)}

d) u = (-1, 2, 0, 1) và W = <S> với S = {(1, 0, 2, 1); (2, 1, 2, 3); (0, 1, -2, 1)}

6.2. Tìm a, b $\in$ R để mỗi giá trị tích phân dưới đây nhỏ nhất và tính các giá trị nhỏ nhất đó:

a) $\int_0^1 \left(x^2 - a - bx\right)^2 dx$; b) $\int_{-1}^1 \left(1 - ax - bx^2\right)^2 dx$

c) $\int_0^1 \left(x - a - be^x\right)^2 dx$; d) $\int_0^{2\pi} (x - a\sin 2x - b\cos x)^2 dx$

e) $\int_0^{\pi} (2 - ax - b\cos 2x)^2 dx$; f) $\int_{-1}^1 (e^x - a - bx)^2 dx$

Chương 7

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Nhận diện được dạng toàn phương
- Đưa dạng toàn phương về chính tắc

7.1. KHÁI NIỆM DẠNG TOÀN PHƯƠNG.

Xét trường K (K = Q, R, C, .. .).

7.1.1 Định nghĩa:

Giả sử V là một K – Không gian véctơ n chiều. Ánh xạ:

$$\varphi : V \times V \to R$$
$$(x, y) \to \varphi(x, y)$$

được gọi là một dạng song tuyến nếu φ tuyến tính theo từng biến x,y, nghĩa là:

a) $\varphi(\alpha x + \alpha' x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \alpha'\varphi(x', y)$

$\forall x, x', y \in V, \forall \alpha, \alpha' \in K.$

b) $\varphi(x, \alpha y + \alpha' y') = \alpha\varphi(x, y) + \alpha'\varphi(x, y')$

$\forall x, y, y' \in V, \forall \alpha, \alpha' \in K.$

Giả sử φ(x,y) là một dạng song tuyến trên V, E = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó với hai véctơ x,y bất kỳ thuộc V

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_i e_i$$

ta có $\boldsymbol{\varphi}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i \boldsymbol{\varphi}(e_i, e\ )$

Đặt $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ ta được

$$\boldsymbol{\varphi}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (1)$$

Ma trận A = (a_{ij}) được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính φ trong cơ sở E, ký hiệu là A = $[\varphi]_E$

Ta có thể viết dạng song tuyến tính φ dưới dạng ma trận: $\boldsymbol{\varphi}(x, y) = [x]_E^T A [y]_E$

Dạng song tuyến tính thường được viết dưới dạng (1).

Chú ý: nếu cơ sở không được chỉ rõ thì khi đó ta ngầm hiểu E là cơ sở chính tắc của V.

Ví dụ:

Dạng song tuyến tính

$$\varphi = x_1y_1 - 2x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_2 + 3x_3y_1 - 7x_3y_3$$

có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Ta có thể đưa vào tập hợp tất cả các dạng song tuyến tính trên V cấu trúc không gian bằng các định nghĩa:

a) $(\varphi + \varphi')(x, y) := \varphi(x, y) + \varphi'(x, y)$.

b) $(\alpha\varphi)(x, y) := \alpha\varphi(x, y)$.

7.1.2. Định nghĩa:

Giả sử V là một K – không gian véctơ n chiều. Dạng song tuyến tính φ(x,y) trên Vđược gọi là đối xứng (tương ứng, phản đối xứng) nếu:

$\varphi(x, y) = \varphi(y, x), \forall x, y \in V$

(tương ứng, $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x), \forall x, y \in V$)

Ma trận của dạng song tuyến đối xứng φ trong một cơ sở E bất kỳ là một ma trận đối xứng. Cũng như vậy, ma trận của dạng song tuyến tính phản đối xứng là một ma trận phản đối xứng.

7.1.3 Định nghĩa:

Giả sử φ là dạng song tuyến tính đối xứng trên K – không gian véctơ V. Ánh xạ

Q: V → K

x ↦ φ(x,y)

được gọi là dạng toàn phương trên V ứng với φ.

Nếu A là ma trận của dạng song tuyến tính φ trong một cơ sở nào đó thì A cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở ấy. Ta có A là ma trận đối xứng, nghĩa là $A^T = A$ và khi đó:

$$Q(x) + [x]_E^T A[\ ]_E$$

Chú ý rằng khi cho Q thì φ hoàn toàn xác định vì dễ thấy rằng

$$\varphi(x,y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

Ví dụ đơn giản nhất của dạng toàn phương là

$Q(x) = X^T I X = ||X||$, với $X = [x]_E$, E là một cơ sở nào đó của V.

Những ví dụ dưới đây sẽ cho thấy tương ứng giữa ma trận đối xứng A và dạng toàn phương $X^T AX$:

Ví dụ:

Cho $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Tính $X^T AX$ đối với các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

a) $X^T AX = (x_1, x_2)(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 3x_2^2$

b) $X^T AX = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= x_1(3x_1 - 2x_2) + x_2(-2x_1 + 7x_2) \\ &= 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 7x_2^2 \\ &= 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2. \end{aligned}$$

Ví dụ:

Với véctơ = $(x_1,x_2,x_3) \in R$, cho

$$Q(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3.$$

hãy viết dạng toàn phương này dưới dạng $X^T AX$.

Các hệ số của x_1^2, x_2^2, x_3^2 sẽ nằm ngang trên đường chéo của A. Để A là ma trận đối xứng, các hệ số của $x_i x_j$ với $i \neq j$ sẽ phải chia đều giữa các phần tử (i,j) và (j,i) của A. Hệ số của x_1x_3 bằng 0. Dễ dàng kiểm tra lại rằng:

$$Q(x) = X^T AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

7.1.4 Định nghĩa: (Đổi cở số cho dạng toàn phương)

Giả sử $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ là cơ sở khác của V,

$$f_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$$

P = (c_{ij}) là ma trận chuyển cơ sở từ E sang F.

Nếu A, A' là các ma trận của dạng song tuyến tính φ trên V theo thứ tự trong cơ sở E và F thì

$$a'_{ij} = \varphi(f_i, f_j) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} e_l\right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} \varphi(e_k, e_l) = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki} a_{kl} c_{lj}.$$

Nghĩa là $$A' = P^T AP \qquad (2)$$

7.2. DẠNG CHÍNH TẮC CỦA MỘT DẠNG TOÀN PHƯƠNG – ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ CHÍNH TẮC

7.2.1 Định nghĩa:

Trong không gian Euclide R^n xét dạng toàn phương Q. Ta nói Q được đưa về dạng chính tắc nếu ta chỉ ra được một cở sở F = {f_j} mà trong cơ sở này, ma trận của dạng toàn phương Q có dạng đương chéo, nghĩa là:

$$Q(x) = [x]_E^T A_F [x]_F = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

với: $$A_F = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), [x]_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng một dạng toàn phương luôn có thể đưa về dạng chính tắc.

7.2.2 Phương pháp biến đổi trực giao

Xét dạng toàn phương

$$Q: R^n \to R$$
$$x \mapsto Q(x)$$

với ma trận A trong cơ sở chính tắc E của R^n. A là một ma trận thực, đối xứng. Theo kết quả ở Chương 7, tồn tại cơ sở trực chuẩn F = {f_j} gồm những véctơ riêng của A:

$$f_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i .$$

P = (c_{ij}) là ma trận chuyển cơ sở trực chuẩn, cho nên P là ma trận trực giao, nghĩa là:

$$P^T = P^{-1}$$

Giả sử A' là ma trận của Q trong F. Thế thì A' là ma trận chéo với đường chéo là các trị riêng tương ứng với các véctơ riêng f_i và ta có:

$$A' = P^T AP = P^{-1}AP \qquad \text{theo (2)}$$

Nếu $x \in R^n$ có toạ độ đối với cơ sở F là:

$$X = [x]_F = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$$

thì do A' có dạng chéo nên

$$Q(X) = X^T A' X = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 .$$

Do đó $A' = P^{-1}AP$ nên A' và A có cùng đa thức đặc trưng và λ_i chính là các trị riêng của A

Ví dụ:

Giả sử Q là dạng toàn phương trên không gian véctơ Euclide R^3 xác định bởi:

$$Q(x) = 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2$$

với $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$ và $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A là:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(2-\lambda)$$

Vậy $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ là các giá trị riêng của A, λ_1 là nghiệm đơn, λ_2 là nghiệm kép. Ta tìm các véctơ riêng, đồng thời sẽ là các cột của ma trận đổi cơ sở P:

$$A - \lambda_1 I = A + 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và $$A-\lambda_2 I = A - I = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Do đó các véctơ riêng là:

$$v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,0) \text{ và } v_3 = (0,1,-1)$$

Thực hiện quá trình trực giáo hoá, trực chuẩn hoá, ta thu được các véctơ trực giao

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Và ma trận P của phép chuyển cơ sở chính tắc sang cơ sở trực chuẩn

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

là ma trận có các véctơ cột là các véctơ v_1, v_2, v_3

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Nếu x = (x_1, x_2, x_3) có tọa độ đối với cơ sở v_1, v_2, v_3 là

$$x = x_1' v_1 + x_2' v_2 + x_3' v_3$$

thì:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$$

hay:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3',$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3',$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1^{'} - \frac{2}{\sqrt{6}}x_3^{'}$$

Thay x_1, x_2, x_3 bằng các biểu thức trên dạng toàn phương cho Q(x), ta được dạng chính tắc toàn phương cho Q(x), ta đượcdạng chính tắc toàn phương

$$\lambda_1 x_1^{'2} + \lambda_2 x_2^{'2} + \lambda_3 x_3^{'2} = 2x_1^{'2} - x_2^{'2} - x_3^{'2}$$

gồm các tổng bình phương.

7.2.3 Phương pháp Lagrange

Ý tưởng cơ bản của phương pháp Lagrange là từng bước đưa dạng toàn phương về dạng

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1 x_1^2 + Q_1(x_2, \cdots, x_n), \qquad (3)$$

với $Q_1(x_1, \ldots, x_n)$ chỉ có tối đa n – 1 biến:

$$Q_1(x_2, \cdots x_n) = a_2 x_2^2 + Q_2(x_3, \cdots, x_n),$$

Bài toán được chia ra làm 2 trường hợp với các cách xử lý khác nhau:

1^o. Trường hợp $a_{ii} = 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$;

2^o. Trường hợp có ít nhất một $a_{ii} \neq 0$ với i nào đó.

Trường hợp 1^o. $\underline{a_{ii} = 0, \forall i = 1,2,\ldots,n}$.

Ta tìm cách đưa về Trường hợp 2^o.

+ Nếu $a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0$ thì dạng toàn phương chỉ còn n – 1 biến và chuyển xử lý cho $Q(x_2, \ldots, x_n)$.

+ Nếu ngược lại $a_{12} \neq 0$. Ta thực hiện biến đổi theo công thức:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{'} + x_2^{'}; \\ x_2 = x_1^{'} + x_2^{'} \\ x_3 = x_3^{'} \\ \vdots \\ x_n = x_n^{'} \end{cases}$$

Cơ sở mới là E' = $\{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}, \cdots, e_n^{'}\}$. Ma trận của phép đổi cơ sở trên là không suy biến và có dạng

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sau phép biến đổi trên, dạng toàn phương Q có dạng

$$Q = 2a_{12}x_1^{'2} - 2a_{12}x_2^{'2} + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{'} x_i^{'} x_j^{'}$$

và vì vậy, với phép biến đổi toạ độ trên, Trường hợp 1^o đưa về Trường hợp 2^o.

Trường hợp 2^o. *Có ít nhất một $a_{ij} \neq 0$ với i nào đó.*

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_{11} \neq 0$,

$$Q = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right]$$

$$- a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Đặt $a_1 = a_{11}$ và

$$\begin{cases} x_1^{'} &= &+ & \left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) \\ x_2^{'} &= & x_2 & \\ & \vdots & & \\ x_n^{'} &= & x_n & \end{cases}$$

$$Q_1\left(x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}\right) = -a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{'} + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{'}\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

ta được

$$Q = a_1x_1^{'2} + Q_1(x_2^{'}, \cdots, x_n^{'})$$

có dạng (3) với $Q_1\left(x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}\right)$ là một dạng toàn phương với n – 1 biến.

Tiếp tục thuật toán với Q_1, sau một số hữu hạn bước ta sẽ đưa Q về dạng chính tắc.

Cuối cùng, để viết được ma trận cơ sở, ta viết lại phép biến đổi trên dưới dạng

$$\begin{cases} x_1' &= x_1' - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2' - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n' \\ x_2' &= x_2' \\ &\vdots \\ x_n' &= x_n' \end{cases}$$

Phép chuyển cơ sở sang cơ sở mới $E' = \{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$ có ma trận là:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Thuật toán Lagrange trình bày trên đây còn được gọi là “ khử các số hạng chữ nhật”.

Ví dụ:

Cho dạng toàn phương Q trong R^4

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_4^2 - 2x_4^2$$

Ta biến đổi như sau:

$$Q = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - (-x_2 + x_3 - x_4)^2 + x_2^2 + x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_2^3 - 2x_4^2$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 + 3x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4 - x_4^2$$

Đặt $x_1' = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$ và khử số hạng chữ nhật của x_4

$$Q(x) = x_1'^2 - 3(x_4 + x_2 - \frac{x_3}{3})^2 + x_2x_3 + \frac{x_3^2}{3}$$

Đặt $x_2' = x_4 + x_2 - \dfrac{x_3}{3}$ và khử số hạng chữ nhật của x_3

$$Q(x) = x_1'^2 - 3x_2'^2 + \frac{1}{3}(x_3 - \frac{3x_2}{2})^2 + \frac{3x_3^2}{4}$$

Đặt $x_3' = x_3 + \dfrac{3x_2}{2}; x_4' = x_2$

$$Q(x) = x_1'^2 - 3x_2'^2 + \frac{1}{1}x_3'^2 - \frac{3}{4}x_4'^2$$

Đây là dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho. Phép biến đổi đã tiến hành là:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4\\
x_2' &= x_4 + x_2 - \frac{x_3}{3}\\
x_3' &= x_3 + \frac{3x_2}{2}\\
x_4' &= x_2
\end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_1' + x_2' - \frac{4}{3}x_3' + x_4'\\
&x_2 = x_4'\\
&x_3 = x_3' - \frac{3}{2}x_4'\\
&x_4 = x_2' - \frac{x_3'}{2} - \frac{3}{2}x_4'
\end{aligned}$$

Ma trận chuyển cơ sở sang cơ sở chính tắc là:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4/3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3/2\\ 0 & 1 & -1/3 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Như vậy, cơ sở chính tắc là:

$$e_1' = (1,0,0,0), e_2' = (1,0,0,1), e_3' = (-\frac{4}{3},0,1,-\frac{1}{3}), e_4' = (1,1,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$$

❖ BÀI TẬP CỦNG CỐ

7.1. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hãy đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc.

a) $Q(x)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$;

b) $Q(x)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

c) $Q(x)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

7.2. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hãy đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

a) $Q(x)=x_1^2+x_1x_2+x_3x_4$;

b) $Q(x)=x_1x_2+2x_3x_4$;

7.3. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng các phép biến đổi trực giao.

a) $Q(x)=2x_1x_2$;

b) $Q(x)=3x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2$;

c) $Q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

d) $Q(x)=x_1^2+2x_2^2-6x_1x_3+x_3^2-4x_4^2$;

e) $Q(x)=x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+x_3^2$;

f) $Q(x)=2x_1^2-2x_1x_2+6x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3-x_3^2$;

7.4. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hãy đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc, biện luận theo λ và μ về các chỉ số quán tính của các dạng toàn phương này.

a) $Q(x)=x_1^2+\lambda x_1x_2+x_2^2+2x_3x_4$;

b) $Q(x)=\lambda x_1^2+\mu x_1(x_2+x_3+x_4)+x_2(x_3+x_4)+x_3x_4$;

7.5. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc.

a) $Q(x)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

b) $Q(x)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;

$Q(x)=x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3+3x_3^2$;

TÀI LIỆU THAM KHẢO

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỂ BIÊN SOẠN NỘI DUNG MÔN HỌC:*

1. Đại số tuyến tính – Bùi xuân Hải (chủ biên) – 2000 – Ban xuất bản trường Đại học Khoa học Tự nhiên.

2. Đại số tuyến tính: Lý thuyết và Bài tập - Tạ Văn Hùng, Nguyễn Phi Khứ, Hà Thanh Tâm

3. Đại số tuyến tính - Dương Quốc Việt, Nguyễn Cảnh lương, NXB KHKT, Hà Nội, 2005

4. Bài tập đại số tuyến tính Hoàng Xuân Sính, Trần Phương Dung - Tái bản lần thứ 2 - Hà Nội 2003

5. Bài tập đại số tuyến tính và hình học giải tích - Khu Quốc Anh, Hà Nội, Đại học Quốc gia Hà Nội, 1999

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỂ NGHỊ CHO HỌC VIÊN:*

1. Đại số tuyến tính – Bùi xuân Hải (chủ biên) – 2000 – Ban xuất bản trường Đại học Khoa học Tự nhiên.

2. Đại số tuyến tính : Lý thuyết và Bài tập - Tạ Văn Hùng, Nguyễn Phi Khứ, Hà Thanh Tâm