**Phụ lục 5**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
**KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN**
**BỘ MÔN TOÁN**

# TÀI LIỆU GIẢNG DẠY
# MÔN VI TÍCH PHÂN

**GV biên soạn: Nguyễn Văn Tiên**

**Trà vinh, tháng 2 năm 2013**
**Lưu hành nội bộ**

# MỤC LỤC

**Nội dung** **Trang**

**Chương 1**
**ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN**
**-------**

> ❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:
> - Tìm giới hạn, xét tính liên tục của hàm số.
> - Tính đạo hàm, vi phân của hàm.

## 1.1. Hàm số

### 1.1.1. Khái niệm hàm số

Cho $D \subset \mathbb{R}$. Ánh xạ $f: D \to \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số xác định trên D

Tập D gọi là miền xác định của f.

$T = \{f(x) | x \in D\}$ gọi là miền giá trị của f.

$G = \{(x, f(x)) | x \in D\}$ gọi là đồ thị của hàm số.

Ví dụ: Hàm số

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, tập giá trị $T = [1; +\infty)$.

### 1.1.2. Tính chất

Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và $y=F(x)$.

a/ $f = g$ khi và chỉ khi $f, g$ có cùng miền xác định D và $\forall x \in D: f(x)=g(x)$.

b/ $f>g$ khi và chỉ khi $f, g$ có cùng miền xác định D và $\forall x \in D: f(x) > g(x)$.

c/ $F=f+g \Leftrightarrow \forall x \in D$ là miền xác định của F thì $F(x)=f(x)+g(x)$.

d/ Hiệu, tích, thương của $f, g$ được định nghĩa tương tự.

e/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là tăng hay đồng biến $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

f/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là giảm hay nghịch biến $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

g/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là bị chặn (hay giới nội) trong D nếu $\exists k>0: |f(x)|<k, \forall x \in D$.

h/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là hàm số chẵn trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu $\forall x \in (-a; a)$: $f(-x)=f(x)$.

i/ Hàm số $y=f(x)$ gọi là hàm số lẻ trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu $\forall x \in (-a; a)$: $f(-x)=-f(x)$.

j/ Hàm số y=f(x) có tập xác định $D \subset \mathbb{R}$, hàm số f gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $l \neq 0$ sao cho nếu $x \in D$ thì $x + l \in D$ và f(x+l)=f(x), số dương bé nhất trong các số l trên gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn y=f(x).

Ví dụ: Hàm số y=sinx, y=cosx tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$. Hàm số y=tanx, y=cotx tuần hoàn với chu kỳ $\pi$.

**1.1.3. Hàm số hợp.**

**1.1.3.1. Khái niệm**

Cho hàm số: $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Hàm số $h : X \to Z$ gọi là hàm số hợp của $f, g$ ký hiệu: $h = f \circ g$ xác định bởi $\left( f \circ g \right)\left( x \right) = f\left( g\left( x \right) \right)$

**1.1.3.1. Ví dụ 1**

Cho $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \sin 2x$ thì

$$\left( f \circ g \right)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = \sin^2 2\mathrm{x} + 1.$$

$$\left( g \circ f \right)(x) = g(f(x)) = \sin 2(f(x)) = \sin 2(x^2 + 1) = \sin\left( 2\mathrm{x}^2 + 1 \right).$$

**1.1.4. Hàm số ngược**

Cho hàm số $f : X \to Y$, nếu $f$ là một song ánh thì $f^{-1} : Y \to X$ là hàm số ngược của $f$.

Ví dụ: Hàm số $y = 2x - 2$, hàm số ngược của nó là $x = \frac{y+2}{2}$ ( hoặc $y = \frac{x+2}{2}$ ).

**1.1.5. Một số hàm số sơ cấp cơ bản**

♦ Hàm số $y = x^\alpha, \alpha \in R$, miền xác định của nó phụ thuộc vào $\alpha$.

- Nếu $\alpha \in N$ thì $D = R$.

- Nếu $\alpha \in Z^-$ thì $D = R \setminus \{0\}$.

- Nếu $\alpha \in Q^+$ thì $D = R^+$.

- Nếu $\alpha \in Q^-$ thì $D = R^+ \setminus \{0\}$.

♦ Hàm số $y = a^x, a > 0, a \neq 1$, xác định $\forall x \in R^+ \setminus \{0\}$, hàm số tăng khi $a > 1$, giảm khi $0 < a < 1$.

♦ Hàm số $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, là hàm số ngược của $y = a^x$ xác định khi $x > 0$, hàm số tăng khi $a > 1$, giảm khi $0 < a < 1$.

♦ Hàm số lượng giác:

- $y = \sin x, y = \cos x$ miền xác định là $R$.

- $y = \tan x$, xác định khi $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$.

- $y = \cot x$, xác định khi $x \neq k\pi, k \in Z$.

♦ Hàm số lượng giác:

- $y = \arcsin x$ là hàm số ngược của $y = \sin x$.

- $y = \arccos x$ là hàm số ngược của $y = \cos x$.

- $y = \arctan x$ là hàm số ngược của $y = \tan x$.

- $y = arc\cot x$ là hàm số ngược của $y = \cot x$.

♦ Hàm số hyperbol

- $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sin hyperbol)

- $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosin hyperbol)

- $thx = \dfrac{shx}{chx}$ (tan hyperbol)

- $cothx = \dfrac{chx}{shx}$ (cotan hyperbol)

Ta có các công thức:

$ch^2x - sh^2x = 1$ $\qquad$ $sh2x = 2shx.chx$

$ch2x = ch^2x + sh^2x$ $\qquad$ $sh(x+y) = shx.chy + chx.shy$

$ch(x+y) = chx.chy + shx.shy$ $\qquad$ $sh(x-y) = shx.chy - chx.shy$

$ch(x-y) = chx.chy - shx.shy$ ;…

## 1.2. Dãy số và giới hạn của dãy số

### 1.2.1. Khái niệm

♦ **Định nghĩa 1**. Hàm số $u : N^* \to R$ ($N^*$ là tập các số nguyên dương). Những giá trị của hàm số ứng với $n = 1, 2, 3, ..., n, ...$ gọi là một dãy số.

Đặt $u_1 = u(1), u_2 = u(2), ..., u_n = u(n), ...$, dãy số được viết dưới dạng $\{u_n\}$ hoặc $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$,

Các số $u_i$ gọi là các số hạng của dãy, $u_n$ gọi là số hạng tổng quát của dãy.

♦ **Ví dụ:** Dãy $\{u_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ là dãy số : $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, ..., \dfrac{n}{n+1}, ...$

♦ **Định nghĩa 2**. Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ khi $n \to \infty$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to \infty$, nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} > 0 : \forall n \geq N$ thì $|u_n - a| < \varepsilon$.

Dãy số có giới hạn thì gọi là dãy số hội tụ, ngược lại gọi là dãy phân kỳ.

**Ví dụ:** Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Thật vậy,

$\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, ta có thể chọn một số rất bé cụ thể nào đó, chẳng hạn $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$.

Muốn cho $|u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10^4} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow n > 10^4 - 1$. Thì ta phải chọn $N = 10^4 - 1$, lúc này ta sẽ có $|u_n - 1| < \varepsilon$.

♦ **Định nghĩa 3**. Dãy $\{u_n\}$ dần đến vô cùng khi $n$ tiến đến vô cùng nếu với $M > 0$ lớn tùy ý, có số nguyên dương $N$ sao cho với mọi $n > N$, ta luôn có $|u_n| > M$. Ký hiệu: $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

♦ **Ví dụ:** Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. Thật vậy: nếu chọn $M = 10^5$, muốn cho $|\sqrt{n}| > 10^5 \Rightarrow n > 10^{10}$ thì ta chọn $N = 10^{10}$. Lúc này $\forall n > 10^{10} \Rightarrow |\sqrt{n}| > M$.

♦ **Định nghĩa 4**. Dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng lớn nếu $\lim_{n\to\infty} |u_n| = \infty$; dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng bé nếu $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. Lưu ý rằng nếu $\{u_n\}$ là vô cùng lớn thì $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$ là vô cùng bé và ngược lại.

### 1.2.2. Các định lý về giới hạn của dãy

#### 1.2.2.1. Các tính chất

- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $a$ và $a > p\,(a < p)$ thì tồn tại $N$ sao cho với mọi $n > N \Rightarrow u_n > p\ (u_n < p)$.

- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $a$ và $u_n \leq p\ (u_n \geq p), \forall n$ thì $a \leq p\,(a \geq p)$.

- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $a$ thì $a$ là duy nhất.

- Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn thì nó bị chặn, tức là $\exists k > 0 : |u_n| \leq k, \forall n$.

#### 1.2.2.2. Các định lý

♦ **Định lý 1**. Cho $\lim_{n\to\infty} u_n = a,\ \lim_{n\to\infty} v_n = b$

- Nếu $u_n = v_n, \forall n$ thì $a = b$
- Nếu $u_n \geq v_n, \forall n$ thì $a \geq b$

• **Định lý 2**. Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

Ví dụ: Tính $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Đặt $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Và $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le v_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

Theo định lý trên thì $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

**1.2.2.3. Các phép tính của giới hạn dãy số**

Nếu các dãy $\{u_n\}, \{v_n\}$ hội tụ thì

- Dãy $\{u_n \pm v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}\{u_n \pm v_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

- Dãy $\{u_n.v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}\{u_n.v_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n.\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Hơn nữa $\lim\limits_{n\to\infty}\{k.v_n\} = k.\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

- Dãy $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}, \lim\limits_{n\to\infty} v_n \ne 0$.

* Một số công thức giới hạn dãy số thường gặp:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$,

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, a > 0$,

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$,

d. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

## 1.3. Giới hạn của hàm số

### 1.3.1. Khái niệm

• **Định nghĩa 1**. Cho hàm số f xác định trên tập D. Số L được gọi là giới hạn của hàm số y=f(x) khi $x$ dần về $x_0$ nếu: $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} = L$.

♦ **Ví dụ:** Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

Ta chọn một $\varepsilon$ bé tùy ý cụ thể, chẳng hạn $\varepsilon=\dfrac{1}{10^6}$.

Muốn cho $\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\dfrac{1}{10^6}\Rightarrow|x-2|<\dfrac{1}{10^6}$ thì ta chọn $\delta=\varepsilon=\dfrac{1}{10^6}$. Lúc này ta sẽ có $\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\dfrac{1}{10^6}$ và $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

♦ **Định nghĩa 2.** Ta gọi L là giới hạn của y=f(x) khi $x\to\infty$ nếu $\forall\varepsilon>0,\ \exists A>0:|x|>A$ $\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$. Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$.

Đặc biệt:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists A>0:x>A\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists A>0:x<-A\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon$.

Ví dụ: Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$.

Vì $\forall x>0,\ |f(x)-1|=\dfrac{1}{x}<\varepsilon$. Ta chọn $A$ là số dương lớn hơn $\dfrac{1}{\varepsilon}$ thì $\forall x>A>\dfrac{1}{\varepsilon}$ $\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$.

♦ **Định nghĩa 3.** Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn bằng vô cùng khi $x\to x_0$ nếu: $\forall M>0,\ \exists\delta>:|x|>\delta\Rightarrow|f(x)|>M$. Ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Đặc biệt;

+ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\delta>0:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M$.

+ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\delta>0:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|<-M$.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}=\infty$.

♦ **Định nghĩa 4.** Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn bằng vô cùng khi $x\to\infty$ nếu: $\forall M>0,\exists A>:|x|>A\Rightarrow|f(x)|>M$. Ký hiệu $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Đặc biệt:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0: x>A \Rightarrow |f(x)|>M$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0: x<-A \Rightarrow |f(x)|>M$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0: x<-A \Rightarrow |f(x)|<-M$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0: x>A \Rightarrow |f(x)|<-M$.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$.

**1.3.2. Một số công thức giới hạn**:

a. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

b. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

d. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

e. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0$

f. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

g. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

h. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

i. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

j. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

**1.3.3. Giới hạn một phía**

♦ **Định nghĩa**: Số a được gọi là giới hạn phải (trái) của hàm số $f(x)$ tại $x_0$ khi $x$ tiến về bên phải (trái) $x_0$. Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$ ( $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$ )

♦ **Ví dụ**:

a. Dễ thấy $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

b. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ tại $x=0$, ta có:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ và } \lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{-x}=-1$$

♦ **Định lý**: Điều kiện cần và đủ để $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ là:

+ $\exists\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), \exists\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

+ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

### 1.3.4. Các định lý và tính chất về giới hạn của hàm số

#### 1.3.4.1. Tính chất

a/ Nếu $f(x) = C$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

b/ Giới hạn $a$ nếu có của hàm số là duy nhất.

#### 1.3.4.2. Các định lý về phép tính giới hạn

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ thì:

a/ $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = C + B$

b/ $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = C.B$

c/ $\lim\limits_{x \to x_0} (\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \dfrac{C}{B}, B \neq 0$

*** Hệ quả:**

a/ $\lim\limits_{x \to x_0} k.f(x) = k.C$

b/ $\lim\limits_{x \to x_0} (\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x \to x_0} f_i(x)$

c/ $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x).f_2(x).f_3(x).....f_n(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x).\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x).\lim\limits_{x \to x_0} f_3(x).....\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$

Đặc biệt: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^n$.

#### 1.3.4.3. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

♦ **Tiêu chuẩn Cauchy ( Tiêu chuẩn 1)**. Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi $x \to x_0$ là: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x_1, x_2$ thỏa $0 < |x_1 - x_0| < \delta,\ \ 0 < |x_2 - x_0| < \delta$ thì $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

♦ **Tiêu chuẩn 2**. Cho $f(x)$ xác định $\forall x > 0$. Nếu $f(x)$ đơn điệu tăng và $f(x)$ bị chặn trên thì $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

♦**Tiêu chuẩn 3**. Nếu $\begin{cases} f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin^2(n!x)}{x^2}$.

Ta có $0 \le \dfrac{\sin^2(n!x)}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ và $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, suy ra $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin^2(n!x)}{x^2} = 0$.

### 1.3.5. Vô cùng bé và vô cùng lớn

#### 1.3.5.1. Vô cùng bé

♦ **Khái niệm.** Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

♦ **Ví dụ:**

a. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$ là VCB.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \tan x = 0 \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCB.

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ là VCB.

♦ **Định lý.** $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) - a$ là VCB khi $x \to x_0$, hay là $f(x) = a + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

* **Tính chất**:

a. VCB.C=VCB

b. VCB $\pm$ VCB=VCB

c. VCB.BC=VCB

d. VCB.HT=VCB

Trong đó C- hằng số, BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ.

Ví dụ: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}.\sin x = 0$ với $\sin x$ là đại lượng bị chặn.

♦ **So sánh các vô cùng bé.** Cho $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A,\ 0 \le A \le +\infty$. Khi đó

a. Nếu $A = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCB bậc thấp hơn $f(x)$, khi đó ta ký hiệu $f(x) = O(g(x))$.

b. Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A = 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương, khi đó ta ký hiệu $f(x) \sim g(x)$.

c. Nếu $A = +\infty$ thì ta nói $g(x)$ là VCB bậc cao hơn $f(x)$ hay $f(x)$ là VCB bậc thấp hơn $g(x)$, khi đó ta ký hiệu $g(x) = O(f(x))$.

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

♦ **Định lý.**

a. Nếu $f(x) \sim g(x),\ h(x) \sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$ thì

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{t(x)}$.

b. Giả sử $f_i(x), g_j(x), \overline{i=1,n}; \overline{j=1,m}$ là các VCB khi $x \to x_0$. Khi đó

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + ... + g_m(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)}$. Trong đó $f_{i_0}(x)$ là VCB bậc thấp nhất trong các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCB bậc thấp nhất trong các $g_j(x)$.

♦ **Ví dụ:**

a. Khi $x \to 0$ thì các VCB sau là tương đương: $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x \ln a$.

b. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{e^{2x} - 1}$.

Ta có khi $x \to 0$ thì $\sin 5x \sim 5x$, $e^{2x} - 1 \sim 2x$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$.

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{l\,n(1+2x)}{e^{3x} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

### 1.3.5.2. Vô cùng lớn

♦ **Khái niệm.** Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

♦ **Ví dụ:**

a. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCL.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \cot x = \infty \Rightarrow f(x) = \cot x$ là VCL.

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ là VCL.

***Tính chất**

a. VCL.VCL=VCL.

b. VCL+BC=VCL.

c. VCL+HT=VCL.

d. Tổng hai VCL có thể không là VCL, nhưng tổng hai VCL cùng dấu là VCL.

e. $\dfrac{1}{VCL} = VCB, \dfrac{1}{VCB} = VCL$.

Trong đó BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ.

♦ **So sánh các vô cùng lớn**. Cho $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$. Giả sử tồn tại $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A,\ 0 \le A \le +\infty$. Khi đó

a. Nếu $A = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc thấp hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc cao hơn $f(x)$.

b. Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A = 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL tương đương, khi đó ta ký hiệu $f(x) \sim g(x)$.

c. Nếu $A = +\infty$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$.

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

*** Định lý**.

a. Nếu $f(x) \sim g(x),\ h(x) \sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$ thì $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{t(x)}$.

b. Giả sử $f_i(x),\ g_j(x), \overline{i=1,n}; \overline{j=1,m}$ là các VCL khi $x \to x_0$. Khi đó

$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + ... + g_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)}$. Trong đó $f_{i_0}(x)$ là VCL bậc cao nhất trong các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCL bậc cao nhất trong các $g_j(x)$.

Lưu ý: Trong quá trình giải các bài tập ta sẽ gặp các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty$. Khi đó ta phải khử các dạng vô định.

## 1.4. Hàm số liên tục

### 1.4.1. Khái niệm

♦ **Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D$, $x_0 \in D$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nếu $y = f(x)$ không liên tục tại $x = x_0$ ta nói hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$.

♦ **Ví dụ:** Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \ne 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

Ta có $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

♦ **Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D$, $x_0 \in D$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trái (phải) tại $x = x_0$ nếu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$).

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong $(a;b)$ nếu $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm của $(a;b)$.

### 1.4.2. Các tính chất và định lý

♦ **Định lý.** Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi $y = f(x)$ liên tục trái và liên tục phải tại $x = x_0$.

Ví dụ: Xét hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

Ta có

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = -1 \neq f(0)$$

Vậy $f(x)$ liên tục phải tại $x = 0$, nhưng không liên tục trái tại $x = 0$.

♦ **Định nghĩa**. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D$. Khi đó tập hợp các điểm $M(x,(f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khi $x$ thay đổi trong $D$ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên $D$.

♦ **Định lý.** Đồ thị của hàm số liên tục là một đường liền nét.

♦ **Định lý**. Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $y = f(x)$ bị chặn trên $[a;b]$, tức là $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \in D$.

♦ **Định lý.** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$, tức là $\exists x_1, x_2 : \begin{cases} f(x_1) \geq f(x), \forall x \in D \\ f(x_2) \leq f(x), \forall x \in D \end{cases}$

♦ **Định lý.** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $y = f(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.

♦ **Định lý.** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì có $c \in (a;b)$ để $f(c) = 0$, nói cách khác phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(a;b)$.

Ví dụ: Chứng minh rằng phương trình $x^9 - 3x^4 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0;1)$.

**1.4.3. Phân loại điểm gián đoạn:**

Cho hàm số $y = f(x)$. Điểm $x_0$ là điểm gián đoạn của $y = f(x)$ khi:

a. $y = f(x)$ không xác định tại $x_0$

b. Không tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \to x_0$

c. Tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \to x_0$, nhưng giới hạn này khác $f(x_0)$.

Như vậy ta có thể phân loại các điểm gián đoạn như sau:

+ Điểm $x_0$ là điểm gián đoạn loại 1 khi $\exists f(x_0^-), f(x_0^+)$. Đặc biệt khi $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ thì ta nói $x_0$ là điểm gián đoạn có thể bỏ được.

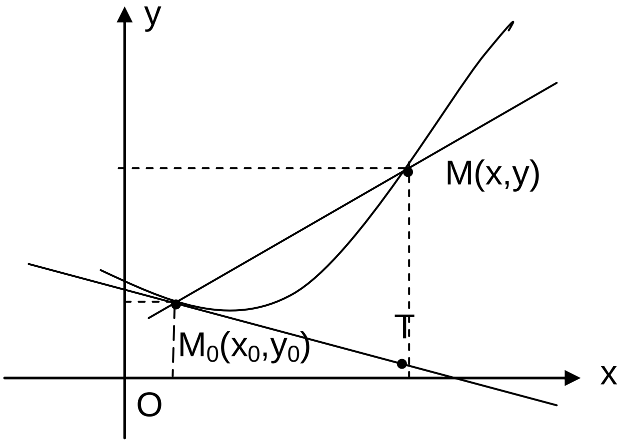
+ Các trường hợp khác gọi là điểm gián đoạn loại 2.

**1.5. Đạo hàm**

**1.5.1. Khái niệm**

**1.5.1.1. Bài toán mở đầu**

Xét đường cong $(C): y = f(x)$, một điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định trên $(C)$ và một cát tuyến $MM_0$. Nếu $M(x, y)$ chạy trên đường cong $(C)$ đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà cát tuyến $MM_0$ dần tới một vị trí tới hạn $TM_0$, thì đường thẳng $TM_0$ gọi là tiếp tuyến của đường cong $(C)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Vậy khi nào thì $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến đó được tính như thế nào?




Đặt

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \end{cases}$$

thì hệ số góc của cát tuyến $MM_0$ là $\tan\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ tiến dần đến $M$ dọc theo đường cong $(C)$, khi đó $\Delta x \to 0$, nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định thì $\beta$ cũng dần đến một góc xác định là $\alpha$, nghĩa là cát tuyến $MM_0$ dần tới vị trí tới hạn $TM_0$ và tạo với $Ox$ một góc $\alpha$.

Từ đó, nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta x \to 0$ thì đường cong $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến là:

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**1.5.1.2. Định nghĩa**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D$, $x_0 \in D$. Cho biến $x$ số gia $\Delta x$ thỏa $x_0 + \Delta x \in D$. Xét số gia hàm số: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ta gọi giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ (nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm của $y = f(x)$ tại $x_0$ và ta cũng nói $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x_0$.

Ký hiệu: $f^{/}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = I$

Nhận xét: nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì $f^{/}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = I$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ bằng định nghĩa $y = x^2$:

Giải

$$f^{/}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x.\left(2x_0 + \Delta x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x_0 + \Delta x\right) = 2x_0$$

**1.5.1.3. Đạo hàm một phía**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D$, $x_0 \in D$.

Ta gọi giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ ( $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ ) ( nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm phải (trái) của $y = f(x)$ tại $x_0$.

Ký hiệu: + Đạo hàm phải $I = f_+^{/}(x_0)$

+ Đạo hàm trái $I = f_-^{/}(x_0)$

***Định lý.** $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f_+'(x_0), \exists f_-'(x_0) \\ f_+'(x_0) = f_-'(x_0) \end{cases}$

**1.5.2. Các quy tắc tính đạo hàm**

$(c)' = 0$ $\quad\quad$ $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(cu)' = c(u)'$ $\quad\quad$ $(u.v)' = u'.v + u.v'$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2} (v \neq 0)$$

**1.5.3. Đạo hàm hàm hợp, hàm ngược:**

**1.5.3.1. Đạo hàm hàm hợp**

Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm $u'(x_0)$ tại $x_0$ và $u_0 = u(x_0)$. Tại $u_0 = u(x_0)$ hàm $y = y(u)$ có đạo hàm $y'(u_0)$ đối với biến $u$. Khi đó tại $x_0$ hàm số $y = y(u(x))$ có đạo hàm $y_x'(x_0)$ theo biến $x$ và $y_x'(x_0) = y_u'(u_0).u_x'(x_0)$ hay $y_x' = y_u'.u_x'$.

**1.5.3.2. Đạo hàm hàm ngược**

Giả sử các điều kiện sau được thỏa:

a/ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y'(x_0) \neq 0$ tại $x_0$

b/ Hàm số $y = f(x)$ là đơn ánh .

c/ Hàm ngược $x = g(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$

Khi đó hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ sẽ có đạo hàm $x_y'(y_0)$ tại $y_0$ và $x_y'(y_0) = \dfrac{1}{y_x'(x_0)}$.

Ta thường ký hiệu hàm ngược là $g(y)$ là $f^{-1}(x)$ và khi đó $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$.

**1.5.3. Các công thức đạo hàm cơ bản**

$(c)' = 0$ $\quad\quad$ $(x^n)' = nx^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$ $\quad\quad$ $(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a^x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad\quad$ $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\quad\quad$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ $\quad\quad$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(arc\cot anx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

**Ví dụ:**

a. $((x^3+4)^5)' = 5.(x^3+4)^4.3x^2$

b. $(\sin^4(\ln x))' = 4\sin^3(\ln x).\dfrac{1}{x}$

**1.5.3. Định lý** (Tính có đạo hàm của hàm của hàm số sơ cấp)

Hàm số sơ cấp có đạo hàm trên miền  xác định của nó.

**1.5.4. Định lý**

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

**1.6. Vi phân**

**1.6.1. Khái niệm**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D$, $x_0 \in D$. Cho biến $x$ số gia $\Delta x$ thỏa $x_0 + \Delta x \in D$. Xét số gia hàm số:

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Nếu $\Delta f$ biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f = f'(x).\Delta x + \alpha(x)$$

trong đó $\alpha(x)$ là vô cùng  bé bậc cao hơn $\Delta x$ khi $\Delta x \to 0$ thì $y = f(x)$ được gọi là khả vi tại $x = x_0$ và biểu thức $f'(x).\Delta x$ gọi là vi phân của $y = f(x)$ tại $x = x_0$. Ký hiệu: $df = f'(x)dx$ với $dx = \Delta x$ hay $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$.

**1.6.2. Định lý**

Hàm số sơ cấp khả vi trên miền xác định của nó. Nghĩa là nó có đạo hàm trên miền xác định của nó.

**1.6.3. Các quy tắc tính vi phân.**

$d(u \pm v) = du \pm dv$ $\qquad$ $dC = 0$

$d(Cv) = Cdv$ $\qquad$ $d(uv) = vdu + udv$

$d(\dfrac{u}{v}) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

**Ví dụ:** Tính vi phân của các hàm số:

a. y=sinx

Ta có: dy=d(sinx)=(sinx)'dx=cosxdx.

b. $y=\sqrt{x}$

$$dy = d\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

**1.6.4. Ứng dụng vi phân để tính gần đúng**:

Nếu $y=f(x)$ khả vi tại $x=x_0$ thì $\Delta f = f'(x).\Delta x+\alpha(x)$. Vì vậy khi $\Delta x$ khá bé ta có công thức xấp xỉ như sau: $f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0).\Delta x+f(x_0)$.

Ví dụ: Tính gần đúng biểu thức $A=\sqrt[4]{15,8}$

Xét hàm số $y=\sqrt[4]{x}$.

Ta có $y' = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

Chọn $x_0 = 16 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 15,8-16=-0,2$.

Áp dụng công thức $f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0).\Delta x+f(x_0)$

$$A=\sqrt[4]{16-0,2}\approx \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{16^3}}\left(-0,2\right)+\sqrt[4]{16}=\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\left(-0,2\right)+2=\frac{319}{160}.$$

**1.7. Đạo hàm và vi phân cấp cao**

**1.7.1. Đạo hàm cấp cao**

♦ **Định nghĩa.** Gọi đạo hàm của $y=f(x)$ là $f'(x)$ thì $f'(x)$ là một hàm số theo biến $x$. Nếu $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm cấp hai của $y=f(x)$. Ký hiệu $f''(x)=(f'(x))'$.

Tương tự ta cũng định nghĩa được đạo hàm cấp ba của $y=f(x)$ và $f'''(x)=(f''(x))'$.

Đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $y=f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp $n$ của $f(x)$. Ký hiệu: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

♦ **Ví dụ:** Tính đạo hàm cấp $n$ của các hàm số:

a. $y=\sin x$ b. $y=\frac{1}{x}$.

Giải

a. $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x+2.\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$$

…

$$y^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

b.

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = (-1)x^{-2}$$
$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = 1.2.x^{-3}$$
$$y''' = (-1)(-2)(-3).x^{-4}$$
...
$$y^{(n)} = (-1)^n 1.2.3...n.x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

♦ **Công thức Lepnit:**

Nếu u, v là các hàm khả vi n lần thì: $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}.v^{(n-k)}$.

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^2.e^x$. Tính $y^{(20)}(0)$.

Giải

Đặt $u = x^2 \Rightarrow u' = 2\text{x} \Rightarrow u'' = 2 \Rightarrow u''' = 0$.

$v = e^{\text{x}} \Rightarrow v' = e^{\text{x}} ... \Rightarrow v^{(20)} = e^x$.

$$y^{(20)}(0) = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k u^{(k)}(0).v^{(n-k)}(0) = C_{20}^{18}.2.1 = 380.$$

### 1.7.2. Vi phân cấp cao

♦ **Định nghĩa.** Ta cũng lý luận tương tự như trên và nếu $df = f'(x)dx$ là vi phân cấp một của $y = f(x)$ thì $d^2 f = f''(x)d^2x$ là vi phân cấp hai của $y = f(x)$. Hơn nữa, ký hiệu $d^n f = f^{(n)}(x)d^n x$ là vi phân cấp $n$ của $f(x)$.

Ví dụ: a. $d^n \sin x = \sin(x + n\frac{\pi}{2})d^n x$ b. $d^n \frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} d^n x$.

## 1.8. Các định lý cơ bản về hàm khả vi

### 1.8.1. Định nghĩa

Cho $y = f(x)$ xác định trên $D$. Ta nói $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại $x_0 \in D$ nếu có một lân cận $V$ của $x_0$ sao cho: $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in V (f(x_0) \geq f(x), \forall x \in V)$

Các điểm cực đại, cực tiểu nói chung gọi là cực trị địa phương.

### 1.8.2. Định lý Fermat

Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x_0$ và tồn tại đạo hàm tại $x_0$ thì $f^{/}(x_0) = 0$

### 1.8.3. Định lý Roll

Cho hàm số $y = f(x)$. Nếu các điều kiện sau thỏa:

a/ $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$

b/ $f(x)$ khả vi trong $(a;b)$

b/ $f(a) = f(b)$

Thì tồn tại $c \in (a;b)$ để $f^{/}(c) = 0$.

### 1.8.4. Định lý Lagrange

Cho hàm số $y = f(x)$. Nếu các điều kiện sau thỏa:

a/ $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$

b/ $f(x)$ khả vi trong $(a;b)$

Thì tồn tại $c \in (a;b)$ để $f^{/}(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$.

### 1.8.5. Định lý Cauchy

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số thỏa:

a/ $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, khả vi trong $(a;b)$

b/ $g^{/}(x) \neq 0, \forall x \in (a;b)$

Thì tồn tại $c \in (a;b)$ để $\dfrac{f^{/}(c)}{g^{/}(c)} = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$.

### 1.8.6. Ví dụ

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a/ $|\text{sinx-siny}| \leq |\text{x-y}|, \forall x, y \in R$

b/ $\ln(1 + x) < x, \forall x > 0$

c/ $\dfrac{a - b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a - b}{b}, 0 < b < a$

Chứng minh:

a/ Xét hàm số $f(x) = \sin x$

Ta có $f$ liên tục trên $R$, $f$ khả vi trên $R$ và có đạo hàm $f^{/}(x) = \cos x, \forall x \in \mathrm{R}$.

Áp dụng định lý Lagrange trên $[a;b] \subset R$. Ta có $\forall c \in R, a < c < b$ thì

$$f^{/}(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \Leftrightarrow (x\text{-}y).\cos x = \sin x - \sin y$$

Từ đó $|\sin x - \sin y| = |(x\text{-}y).| = |(x\text{-}y)|.|\cos x| \le |x\text{-}y|$ vì $|\cos x| \le 1$

b/ Ta có $\ln(1+x) < x, \forall x > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x <, \forall x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x) - x, \forall x > 0$

Hàm số $f$ liên tục và có đạo hàm (hay khả vi) $f^{/}(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1, \forall x \in [0;x]$

Áp dụng định lý Lagrange ta có:

$$f^{/}(c) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{c+1} - 1 = \frac{-\ln(1+x) + x}{-x} \Leftrightarrow x(\frac{1}{c+1} - 1) = \ln(1+x) - x$$

$$\Leftrightarrow -x(\frac{c}{c+1}) = \ln(1+x) - x$$

Vì $c > 0, x > 0$ nên $-x(\dfrac{c}{c+1}) < 0$. Ta suy ra điều cần phải chứng minh.

## 1.9. Quy tắc De $L^{/}$hopital

### 1.9.1. Quy tắc

Giả sử $f(x), g(x)$ thỏa các tính chất sau:

a/ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

b/ $g^{/}(x) \neq 0$ với mọi $x$ thuộc lân cận của $x_0$.

Lúc này, nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$ (hữu hạn hoặc vô hạn) thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$

*Lưu ý rằng quy tắc trên có thể áp dụng nhiều lần liên tiếp cho đến khi giới hạn xác định. Quy tắc vẫn đúng khi $x$ dần đến vô tận.

### 1.9.2. Ví dụ

a/ Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

b/ Tính $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tanx-x}}{x-\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tanx-x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\text{tanx-x})'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$

## 1.10. Công thức Taylor

### 1.10.1. Định lý

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm hữu hạn đến cấp $(n+1)$ trong một khoảng chứa $x$ và $x_0$, thì ta có công thức:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(1)$$

trong đó $c$ nằm giữa $x$ và $x_0$, ta còn viết $c=x_0+\theta x, 0<\theta<1$.

Công thức (1) gọi là công thức Taylor, hàm $f(x)$ khai triển theo công thức (1) gọi là khai triển Taylor hàm $f(x)$ xung quanh điểm $x_0$.

Ta gọi $\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=r_n$ là phần dư thứ $n$ trong khai triển Taylor.

Khi $x_0=0$ (1) trở thành:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}.x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.x^{n+1}(2)$$

Trong đó $c$ nằm giữa $x$ và $0$, ta còn viết $c=\theta x, 0<\theta<1$.

Công thức (2) gọi là công thức Maclarrin, hàm $f(x)$ khai triển theo công thức (2) gọi là khai triển Maclarrin hàm $f(x)$ xung quanh điểm $0$.

### 1.10.2. Ví dụ

Khai triển Taylor các hàm số $y=e^x$ tại $x_0$=1.

Ta có: $y'=e^x$, $y''=e^x,...,y^{(n)}=e^x$

$$e^x=e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+...+\frac{e}{n!}(x-1)^n+r_n.$$

Với c nằm giữa x và 1.

Công thức khai triển Maclaurin một số hàm cơ bản:

+ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+r_n$.

+ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n$

+ $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n$ (x>-1)

**1.10.3. Áp dụng công thức Taylor tính gần đúng của hàm số**

Áp dụng công thức Taylor, có thể tính gần đúng giá trị của hàm số với độ chính xác cao tùy ý nếu phần dư $r_n$ dần đến 0 khi $n \to \infty$.

**Ví dụ:**

Tính gần đúng số e.

Ta có khai triển Taylor của $e^x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{cx}$$

Thay x=1 vào khai triển trên ta được: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$.

Với n=6, ta có: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{e^c}{7!} = 2 + \frac{517}{720} + \frac{e^c}{7!}$

Vì e<3 nên $1 < e^c < 3$ và $\frac{1}{7!} < \frac{e^c}{7!} < \frac{3}{7!} \Leftrightarrow 0,000198 < \frac{e^c}{7!} < 0,000596$

$\Leftrightarrow 2,718253 < e < 2,718652$

Vậy $e \approx 2,718$.

## BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 1

-------

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a/ $y = \sqrt{3x - x^3}$ ,

b/ $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ ,

c/ $y = \log(x^2 - 4)$ ,

d/ $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ .

2. Xác định $f(x)$ biết $\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(-2) = 0, f(0) = 1, f(1) = 5 \end{cases}$

3. Xác định $f(x)$ biết $\begin{cases} f(x) = a + b.c^x \\ f(2) = 30, f(0) = 15, f(4) = 90 \end{cases}$

4. Cho hàm số $f(x) = x^2 + x + 1, g(x) = 2^x$ . Tìm $f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x))$ .

5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ . Tìm $f(f(x)), f(f(f(x)))$ .

6. Tìm $f(x)$ nếu:

a/ $f(x+1) = x^2 + 3x + 2$ ,

b/ $f(x + \dfrac{1}{x}) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ .

7. Tìm các giới hạn:

a/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 2n^2 + n + 3}{n^3 - 4n + 6}$ ,

b/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + n + 3}{n^4 - 5n + 2}$ ,

c/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^6 + 3n^4 - 5}{n^4 - 5n + 2}$ ,

d/ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{1 - n^3}$ .

8. Tìm các giới hạn:

a/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^4 + n - 7}}{n^2 - 5n + 2}$ ,

b/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + \sqrt{n^2 + 2n + 3}}{3 - \sqrt{2n^2 + 1}}$ ,

c/ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n + 3} - n)$ ,

d/ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3n^2 + n + 3} - n\sqrt{3})$ ,

e/ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$ ,

f/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4})}$ .

9. Cho $|q| < 1$, đặt $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$ . Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ .

Áp dụng: Tìm các giới hạn: a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 4.3^n}{5 - 7.3^n}$ , b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3.2^n - 5.7^n}{4^n + 3.5^n}$

10. Tìm các giới hạn:

a/ $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$, b/ $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n})^{3n}$,

c/ $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^n$, d/ $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{n-1}$.

11. Tìm các giới hạn:

a/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$, b/ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$,

c/ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$, d/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

e/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, f/ $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{(x^2-5x+4)}$,

g/ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-x^2-1}-x)$, h/ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x)$,

i/ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$.

12. Tìm các giới hạn:

a/ $\lim_{x\to2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$, b/ $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$,

c/ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

d/ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-3)^{30}(3x+2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$, e/ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)...(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$,

f/ $\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}$, HD: Lưu ý công thức $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

g/ $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, h/ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

13. Tìm các giới hạn:

a/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}$, b/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$,

c/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x.\sin3x.\sin5x}{45x^3}$, d/ $\lim_{x\to0}\frac{\tan5x}{3x}$,

e/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x.\sin2x.\sin3x....\sin nx}{n!x^n}$, f/ $\lim_{x\to0}\frac{3x+\sin^2x}{\sin2x-x^2}$

g/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\sin x}$ h/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\tan 3x}$.

14. Tìm các giới hạn:

a/ $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$, b/ $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x}$,

c/ $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{3}{x})^{x}$, d/ $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2-1}{x^2+1})^{x^2}$

e/ $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$, f/ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ .

g/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$ h/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

15. Tìm đạo hàm cấp một của các hàm số sau đây:

a/ $y=2x^3-5x^2+7x+4$, b/ $y=x^2e^{2x}$,

c/ $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$, d/ $y=(3+2x^2)^4$

e/ $y=\ln(\arcsin 5x)$, f/ $y=\cos(\cos(\cos 2x))$,

g/ $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{x^4+1}, |x|<1$, h/ $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln(\dfrac{1+\sin x}{\cos x})$

16. Tính đạo hàm của các hàm số:

a/ $y=x^x$ b/ $y=x^{x^x}$

c/ $y=(\sin x)^x$ d/ $y=(\ln x)^{2x^2+1}$.

17. Tính đạo hàm của các hàm số:

a/ $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$ b/ $y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[1]{x+1}}{(x-5)^3}$

18. Tìm đạo hàm của:

$$y=\begin{cases}1-x, -\infty<x<1\\(1-x)(2-x), 1\le x\le 2\\2-x, 2<x<+\infty\end{cases}$$

19. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a/ $y=\arctan x$ b/ $w=e^{t^3}$

c/ $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$ d/ $y=\arctan\dfrac{u}{v}$

20. Cho hàm số $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + 3$. Tìm $y', y'', y'''$

21. Cho hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$. Tìm $y''$

22. Cho hàm số $y = x^2 e^x$. Tìm $y^{(20)}(0)$

23. Cho hàm số $y = (2x-3)^3$. Tìm $dy, d^2y, d^3y$.

24. Cho hàm số $y = \sqrt{1+x^2}$. Tìm $d^2y$.

25. Tìm các giới hạn sau:

a/ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$, b/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$,

c/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x.e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$, d/ $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$,

e/ $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1})$, f/ $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$,

g/ $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\ln x}$

26. Viết khai triển Maclaurin của hàm số $y = e^{\sin x}$ đến cấp $x^3$.

## Chương 2
## TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ

-------

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Tính các tích phân bất định.
- Tính các tích phân xác định.
- Tính tích phân suy rộng, xét sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng

### 2.1. Tích phân bất định

#### 2.1.1. Khái niệm nguyên hàm

$F(x)$ gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $D$ nếu và chỉ nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Ví dụ: Vì $(\sin x)' = \cos x$ nên nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$.

#### 2.1.2. Các định lý

♦ **Định lý 1**. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $D$, điều kiện cần và đủ để hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên miền $D$ là $F(x) = G(x) + C$, $\forall x \in D$ ($C$ là hằng số).

#### 2.1.3. Khái niệm tích phân bất định

Tập hợp các nguyên hàm của hàm số $f(x): \{F(x)+C\}_{C\in R}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$. Ký hiệu $\int f(x)dx = F(x) + C, (C \in R)$.

♦ **Các tính chất**:

$a/ \int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$b/ \int K.f(x)dx = K.\int f(x)dx$

$c/ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

$d/ \int f(x)dx = \int f(t)dt = \int f(u)du = \int f(z)dz$

#### 2.1.4. Các công thức tích phân bất định cơ bản

$\int 0dx = C, C \in R;$ $\qquad \int adx = \text{ax} + C, C \in R$

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, C \in R;$ $\qquad \int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + C, C \in R$

$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, C \in R;$ $\qquad \int e^x dx = e^x + C, C \in R$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, C \in R;$ $\int \sin x dx = \cos x + C, C \in R$

$\int \cos x dx = -\sin x + C, C \in R;$ $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, C \in R$

$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C, C \in R;$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, C \in R$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot anx + C, C \in R;$ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = t\,anx + C, C \in R$

$\int \dfrac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan \dfrac{x}{2}\right| + C, C \in R;$ $\int \dfrac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right| + C, C \in R$

*** Các công thức mở rộng khác**

$\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C, C \in R;$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, C \in R$

$\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, C \in R;$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{a + x^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, C \in R$

$$\int \sqrt{a + x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + x^2} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, C \in R$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, C \in R$$

### 2.1.5. Các phương pháp tính tích phân bất định

#### 2.1.5.1. Phương pháp đổi biến

Cho tích phân $I = \int f(x)dx$

♦ **Dạng 1**: Nếu $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ là hàm đơn điệu, khả vi, liên tục theo biến $t$. Khi đó

$$I = \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Ví dụ: $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Đặt $x = a\sin t, t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = a\cos t dt$

$$I = a^2 \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt = a^2 \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= a^2 \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

♦ **Dạng 2**: $u = \phi(x)$ khả vi, liên tục thì

$$I = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

$I = \int \left(x^2+1\right)^{20} xdx$.

Giải

Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{du}{2} = \text{xdx}$

$I = \dfrac{1}{2}\int u^{20}du = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^{21}}{21} + C = \dfrac{1}{24}\left(x^2+1\right)^{21} + C$.

### 2.1.5.2. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u(x), v(x)$ có các đạo hàm liên tục $u^{/}(x), v^{/}(x)$. Khi đó ta có

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

*** Chú ý:** Tích phân từng phần thường được áp dụng cho các dạng:

| | | |
|---|---|---|
| $\int p(x)\ln xdx;$ | $\int p(x)\sin axdx;$ | $\int p(x)e^{ax}dx$ |
| $\int p(x)\ln^n xdx$ | $\int e^{ax}\sin bxdx$ | $\int e^{ax}\cos bxdx$ |
| $\int p(x)\arccos axdx$ | $\int p(x)\arcsin axdx$ | |
| $\int p(x)\text{arccot}xdx$ | $\int p(x)\arctan axdx$ | |

Trong đó $p(x)$ là một đa thức, $a, b \in R$ và không đặt u là hàm mũ.

**Ví dụ:** Tính các tính phân sau:

a/ $I = \int x\ln xdx$

Giải

Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \text{xdx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\text{dx} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow I = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\int \text{xdx} = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C$.

b/ $J = \int x\sin xdx$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x\text{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \text{dx} \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$\Rightarrow J = -x\cos x + \int \cos x\text{dx} = -x\cos x + \sin x + C$.

c/ $K = \int e^x\cos x\text{dx};$

Đặt

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x \mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{dx} = \frac{1}{2} e^x \left(\cos x + \sin x\right) + \mathrm{C}.$$

### 2.1.5.3. Tích phân một số hàm thường gặp

♦ **Hàm hữu tỉ**: Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức.

Để tính tích phân này, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì ta có thể thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int R(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx$, $P_1(x)$ có bậc bé hơn $Q(x)$.

- Phân tich mẫu số ra thừa số tuyến tính và bậc hai: $Q(x) = \left(x-a\right)^n, ..., \left(x^2 + px + q\right)^n, ...$ trong đó tam thức bậc hai không có nghiệm thực thực $x^2 + px + q$.

- Phân tích phân thức $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ra các phân thức đơn giản nhất:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{\left(x-a\right)^2} + ... + \frac{A_m}{\left(x-a\right)^m} + ... +$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + ... + \frac{B_n x + C_n}{\left(x^2 + px + q\right)^n} + ...$$

- Tính các hệ số $A_1, A_2, ..., A_m, ..., B_1, ..., B_n, C_1, C_2, ..., C_n, ...$ bằng cách quy đồng mẫu số ở vế phải, so sánh các hệ số của cùng một lũy thừa của x ở vế phải và vế trái của đồng nhất thức thu được và giải hệ phương trình đại số tuyến tính đối với các hệ số cần tìm. Có thể xác định các hệ số bằng cách khác là cho biến x trong đồng nhất thức những trị số tùy ý.

- Cuối cùng việc lấy tích phân của phân thức hữu tỉ được đưa về tìm tích phân của đa thức và các phân thức hữu tỉ đơn giản nhất, có các dạng sau:

+ $\int \frac{A\mathrm{dx}}{x-a} = A \ln\left|x-a\right| + C$.

+ $\int \frac{A\mathrm{dx}}{\left(x-a\right)^m} = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{\left(x-a\right)^{m-1}} + C$.

+ $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$

$+\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int (2x+p)dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} \quad \left(p^2-4q<0\right).$

$+\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx \left(p^2-4q<0\right)$, ta đưa tích phân về dạng $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$ và áp dụng

$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ để đưa tích phân về dạng $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

**Ví dụ 2:** Tính các tích phân sau:

a/ $I = \int \frac{dx}{x^2-2x-3}$

Giải

Tính: $I = \int \frac{dx}{x^2-2x-3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-4}$

Đặt $x-1=u \Rightarrow du = dx$

$$I = \int \frac{du}{u^2-4} = \int \frac{du}{(u-2)(u+2)} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-2|-\ln|u+2|\right)+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$$

b/ $J = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

Ta có: $J = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

Đặt $u = x+\frac{1}{2} \Rightarrow du = dx$, $J = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$

Đặt $u = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \Rightarrow du = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 t}dt$, ta được:

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}}\int dt = \frac{2}{\sqrt{3}}t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

c/ $K = \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$.

$$K=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+C.$$

d/ $L=\int\frac{14x-11}{x^2+x+-6}dx$

$$L=\int\frac{14x-11}{x^2+x+-6}dx=7\int\frac{2x+1}{x^2+x+-6}dx-\int\frac{18}{x^2+x+-6}dx$$

$$=7\int\frac{d\left(x^2+x+-6\right)}{x^2+x+-6}-\frac{18}{5}\int\frac{1}{(x-2)(x+3)}dx$$

$$=7\ln\left|x^2+x+-6\right|-\frac{18}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C$$

e/ $M=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

Sử dụng công thức: $I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}.\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$

(Hoặc sử dụng phương pháp tích phân từng phần đặt $u=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}$, $dv=dx$ ).

Ta có: $I_3=\frac{1}{2(3-1)}.\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{3-1}}+\frac{2.3-3}{2.3-2}I_{3-1}=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}I_2$

$$I_2=\frac{2}{2(2-1)}.\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{2-1}}+\frac{2.2-3}{2.2-2}I_{2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\frac{x}{\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctanx}+C$$

$$I_3=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctanx}+C\right]$$

f/ $N=\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$

$$N=\int\left(1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\right)dx=\int\left(1-\frac{5x^2+4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}\right)dx$$

Ta có: $\dfrac{5x^2+4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

Áp dụng đồng nhất thức ta được A=C=0, B=1/3, D=16/3.

$$N=\int\left(1-\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}-\frac{16}{3\left(x^2+4\right)}\right)dx=x-\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

♦ **Hàm lượng giác**

Xét tích phân: $\int R(\sin x,\cos x)dx$, trong đó R là hàm hữu tỉ theo sinx, cosx.

Phương pháp chung: Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}\ \Rightarrow\ x=2\arctan t$, suy ra $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Từ đó ta đưa được hàm số ban đầu về dạng hàm số hữu tỉ.

*** Một số trường hợp đặc biệt:**

- Nếu $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ hàm lẻ theo $\sin x$, đặt $t=\cos x$
- Nếu $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ hàm lẻ theo $\cos x$, đặt $t=\sin x$
- Nếu $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ hàm chẵn theo $\sin x$ và $\cos x$, đặt $t=\tan x$ hoặc $t=\cot x$.
- Nếu tích phân dạng $\int\sin^m x.\cos^n xdx$ thì nếu m lẻ thì $t=\cos x$, nếu n lẻ thì $t=\sin x$
- Nếu tích phân dạng $\int\sin mx.\cos nxdx$, $\int\cos mx.\cos nxdx$, $\int\sin mx.\sin nxdx$ thì dùng công thức lượng giác biến đổi tích thành tổng.

**Ví dụ:** Tính các tích phân:

$I=\int\cos^2x.\sin^3xdx$, đặt $t=\cos x$

$J=\int\dfrac{dx}{2\cos^2x+2\sin x.\cos x+2\sin^2x}$, đặt $t=\tan x$.

♦ **Tích phân một số hàm vô tỉ**

- Nếu $I=\int R(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},...)dx$ thì

Đặt $ax+b=t^s$ với $s=BCNN(n_1,n_2)$

- Nếu $\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ thì biến đổi $ax^2+bx+c=u^2+q$ rồi đưa về tích phân cơ bản.

- Nếu $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ thì biến đổi về dạng

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{d(x^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

- Nếu $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ thì đặt x-a=1/t.

**Ví dụ:** Tính các tích phân sau:

a/ $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}$

Đặt $2x+1 = t^6 \Rightarrow dx = 3t^5 dt$

$$I = \int \frac{3t^5}{t^4-t^3}dt = 3\int \frac{t^2 dt}{t-1} = \int \left(t-1+\frac{t}{t-1}\right)dt$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C$$

b/ $J = \int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$.

$$J = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{(4x+8)}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C$$

c/ $K = \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

$$K = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} - \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

Tính $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}dx$, đặt x+1=1/t, ta được

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int \frac{1/t^2 dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C = \ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C$$

$$K = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C$$

## 2.2. Tích phân xác định

### 2.2.1. Bài toán tính diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định dương trên $[a;b]$.

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), x = a, x = b, y = 0$ (Ox) được gọi là hình thang cong. Bài toán là hãy tính diện tích của hình thang cong đó.

Ta chia đoạn $[a;b]$ thành $n$ đoạn nhỏ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, như vậy hình thang cong cũng đã được chia thành $n$ cột nhỏ. Ta gọi $\Delta x_i$ đồng thời là độ dài và đoạn thẳng $[x_{i-1}; x_i], i = 1,...,n$ và $d = max\{\Delta x_i\}$, trên mỗi $\Delta x_i$ ta lấy một điểm $t_i$ tùy ý. Nếu $\Delta x_i$ khá bé ta có thể xem diện tích của cột cong thứ $i$ xấp xỉ với diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước $\Delta x_i$, $f(t_i)$. Suy ra $S_i \simeq f(t_i).\Delta x_i$

Do đó diện tích của hình thang cong ban đầu có thể xấp xỉ với $S \simeq \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$

Từ đó ta có định nghĩa sau:

Diện tích hình thang cong ban đầu là $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$ (nếu tồn tại).

### 2.2.2. Định nghĩa tích phân xác định:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định dương trên $[a;b]$. Ta chia đoạn $[a;b]$ thành $n$ đoạn nhỏ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Ta gọi $\Delta x_i$ đồng thời là độ dài và đoạn thẳng $[x_{i-1}; x_i], i = 1,...,n$ và $d = max\{\Delta x_i\}$, trên mỗi $\Delta x_i$ ta lấy một điểm $t_i$ tùy ý, lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$ (gọi là tổng tích phân). Nếu tồn tại $I = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$ hữu hạn không phụ thuộc vào phép chia đoạn $[a;b]$ và cách lấy điểm $t_i$ trên mỗi $\Delta x_i$, thì $I$ được gọi là tích phân xác định của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, và khi đó ta nói $y = f(x)$ khả tích trên $[a;b]$. Ký hiệu: $I = \int_a^b f(x)dx$.

### 2.2.3. Các định lý về hàm số khả tích

- **Định lý 1.** Nếu $y = f(x)$ khả tích trên $[a;b]$ thì $y = f(x)$ bị chặn trên $[a;b]$ (tức là $\exists M > 0, |f(x)| \le M, \forall x \in [a;b]$).
- **Định lý 2**. Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $y = f(x)$ khả tích trên $[a;b]$.
- **Định lý 3**. Nếu $y = f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên $[a;b]$ thì nó khả tích trên $[a;b]$.

### 2.2.4. Các tính chất

a/ $\int_a^a f(x)dx = 0; \int_a^b Cdx = C(b-a); \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

b/ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

c/ $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx; \int_a^b C.f(x)dx = C.\int_a^b f(x)dx$

d/ Nếu $y = f(x)$ khả tích và $f(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

e/ Nếu $f(x) \le g(x)$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

f/ Nếu $n \le f(x) \le t$ thì $n(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le t(b-a)$

g/ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

h/ Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì có $c \in [a;b]$ sao cho: $f(c) = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)dx \ge 0$

i/ Công thức Newton-Leibnitz: Nếu $y = f(x)$ liên tục và F(x) là một nguyên hàm của $f(x)$ thì : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

♦ **Ví dụ:** Tính I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+e^x+\cos x)dx$ .

I=$\left(\frac{x^3}{3}+e^x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}+e^{\frac{\pi}{2}}$ .

### 2.2.5. Các phương pháp tính tích phân xác định

♦ **Phương pháp đổi biến**

Công thức 1: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt, t=u(x)$

Công thức 2: $\int_\alpha^\beta f(u)du=\int_a^b f(u(x))u'(x)dx, \alpha=u(a), \beta=u(b)$

Trong đó $t=u(x)$ khả vi trong $(a;b)$, liên tục trong $[a;b]$, f(u) liên tục trong miền giá trị của $t=u(x)$ và $f(u(x))u'(x)$ khả tích trên $[a;b]$.

♦ **Phương pháp từng phần**

$$\int_a^b udv=u.v\big|_a^b-\int_a^b vdu$$

♦ **Ví dụ:** Tính các tích phân sau:

a/ $I=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow I=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=1/3$.

b/ $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx,\ dv=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx\Rightarrow v=-\frac{1}{\cos x}$.

$$\Rightarrow J=-\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=-\frac{2\pi}{3}+\ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{2\pi}{3}+\ln\tan\frac{5\pi}{12}$$

### 2.2.6. Ứng dụng của tích phân xác định

#### 2.2.6.1. Tính diện tích hình phẳng

- Nếu $D:\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \Rightarrow S(D) = \int_a^b |f(x)|dx$

- Nếu $D:\begin{cases} f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \Rightarrow S(D) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$

- Nếu $D:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \le t \le b; \Rightarrow S(D) = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt$

- Nếu $D:\begin{cases} r = r(\varphi) \\ a \le \varphi \le b \end{cases} \Rightarrow S(D) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi$.

**Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a/ $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 1$.

b/ $y = x^3, y = x$.

c/ $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

d/ Tính diện tích : $r = a, (0 \le \varphi \le 2\pi)$

#### 2.2.6.2. Tính độ dài cung phẳng

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}, a \le t \le b; \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2}dt$

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} r = r(\varphi) \\ a \le \varphi \le b \end{cases} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi$

♦ **Ví dụ 5:**

a/ Tính độ dài cung $\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

b/ Tính độ dài đường astroid $\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} y = a\cos^3 t \\ x = \sin^3 t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

c/ Tính độ dài đường xoắn ốc: $r = e^{\frac{\varphi}{2}}, 1 \le \varphi \le 2$

#### 2.2.6.3. Tính diện tích mặt tròn xoay

- Giả sử $(C):\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ khi $(C)$ xoay quanh Ox vật thể thu được có diện tích của mặt tròn xoay là $S = 2\pi\int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f^{/}(x))^2}dx$

- Giả sử $(C):\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}, a \le t \le b$

+ Nếu $(C)$ xoay quanh Ox thì diện tích mặt tròn xoay thu được là:

$$S = 2\pi\int\limits_a^b |y(t)|\sqrt{(x^{/}(t))^2 + (y^{/}(t))^2}dt .$$

+ Nếu $(C)$ xoay quanh Oy thì diện tích mặt tròn xoay thu được là:

$$S = 2\pi\int\limits_a^b |x(t)|\sqrt{(x^{/}(t))^2 + (y^{/}(t))^2}dt .$$

#### 2.2.6.4. Tính thể tích

♦ **Thể tích của vật thể bất kỳ**

Xét vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a, x = b(b > a)$. Giả sử biết diện tích thiết diện vuông góc với trục Ox là $S(x)$. Khi đó thể tích vật thể được tính bởi:

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx$$

♦ **Thể tích vật thể tròn xoay**

- Giả sử $(C):\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ khi $(C)$ xoay quanh Ox vật thể thu được có thể tích là

$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

- Giả sử $(C):\begin{cases} x = f(y) \\ a \le y \le b \end{cases}$ khi $(C)$ xoay quanh Oy vật thể thu được có thể tích là

$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(y)dy$$

- Nếu ta có hình thang cong giới hạn bởi $y = f(x), y = 0, x = a, x = b(a < b)$. Khi quay hình thang quanh trục Oy thì thể tích thu được là

$$V = 2\pi\int\limits_a^b x|f(x)|dx$$

### 2.3. Tích phân suy rộng

#### 2.3.1. Tích phân suy rộng cận vô hạn

♦ **Định nghĩa**

Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $\left[a;+\infty\right)$ và khả tích trên đoạn $\left[a;b\right](b>a)$ bất kỳ. Ta gọi giới hạn: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (1) nếu tồn tại là tích phân suy rộng của hàm số $y = f(x)$ trên $\left[a;+\infty\right]$. Ký hiệu: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (2). Vậy

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Nếu (1) có kết quả hữu hạn thì ta nói tích phân (2) hội tụ, ngược lại (giới hạn không tồn tại hoặc vô hạn) ta nói tích phân (2) phân kỳ.

Tương tự ta cũng định nghĩa được tích phân suy rộng của $y = f(x)$ trên đoạn $\left[-\infty;a\right]$ như sau: $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)dx$.

Tích phân suy rộng của $y = f(x)$ trên $\left[-\infty;+\infty\right]$ là

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

♦ **Ví dụ:** Xét sự hội tụ của $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, a>0$

Ta có: Với $\alpha = 1, \int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big\|_a^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln|b| - \ln|a|\Big\|_a^b = +\infty$, tích phân phân kỳ.

Với $\alpha \neq 1, \int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b) = \begin{cases}\dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \alpha>1\\ +\infty, \alpha<1\end{cases}$

Vậy $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, a>0$ hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $\alpha\le 1$.

♦ **Các tính chất:**

i. Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx, \forall A>a$ cũng hội tụ.

ii. Nếu các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì:

$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$

$\int_a^{+\infty} K.f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} K.f(x)dx = K.\int_a^{+\infty} f(x)dx$ $K$ là hằng số.

♦ **Các định lý:**

**Định lý 1**. Giả sử $0 \le f(x) \le g(x), \forall a > 0$. Khi đó

a/ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

b/ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ.

**Ví dụ**: Xét tích phân: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

Ta có $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}.\forall x > 1$, và ta có $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ hội tụ.

**Định lý 2.** Giả sử $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0, a > 0$ và tồn tại $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A(0 \le A \le +\infty)$. Khi đó với $0 < A < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

**Ví dụ**: Xét tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2 + 1}}$. Với $g(x) = \frac{1}{x}$, xét giới hạn sau

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x + \sqrt[3]{x^2 + 1}} = 1$, mà $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ phân kỳ.

Từ đây ta có $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2 + 1}}$ phân kỳ .

### 2.3.2. Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

♦ **Định nghĩa**

Cho hàm số $y = f(x)$ khả tích trên $[a + \varepsilon; b], 0 < \varepsilon < b - a$, nhưng không bị chặn trên $[a; b]$.

Ta gọi giới hạn $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,(1)$ nếu tồn tại là tích phân suy rộng của $y=f(x)$ trên $[a;b]$, ký hiệu: $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Nếu (1) hội tụ ta nói $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ, ngược lại nếu (1) không tồn tại hoặc vô hạn thì ta nói $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa sau: $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^-}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx,(0<\varepsilon<b-a)$

- Nếu trên đoạn $[a;b]$ cả $a,b$ đều là điểm bất thường của $y=f(x)$ thì

$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ hoặc $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx, c\in[a;b]$

- Nếu $c\in[a;b]$ là điểm bất thường của $y=f(x)$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$

♦ **Ví dụ:** Xét tích phân $\int\limits_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^{\alpha}}dx,(b>a)$

Với $\alpha=1, \int\limits_a^b \frac{1}{(\text{x-a})}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln|\text{x-a}|\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln|\text{b-a}|-\ln|\varepsilon|)=+\infty$. Vậy tích phân phân kỳ.

Với $\alpha\neq 1, \int\limits_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^{\alpha}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{(\text{x-a})^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{(\text{b-a})^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{(\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\frac{(\text{b-a})^{1-\alpha}}{1-\alpha},\alpha<1\\ +\infty,\alpha>1\end{cases}$

Vậy $\int\limits_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^{\alpha}}dx,(b>a)$ hội tụ khi $\alpha<1$, phân kỳ khi $\alpha\geq 1$

♦ Tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ hội tụ. Tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ được gọi là bán hội tụ nếu $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ và $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ.

♦ **Các định lý:**

**Định lý 1.** Giả sử $y=f(x)$ dương và khả tích trên $[a+\varepsilon;b], 0<\varepsilon<b-a$. Khi đó

$\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ bị chặn với mọi $0 < \varepsilon < b-a$.

**Định lý 2**. Giả sử $0 \le f(x) \le g(x)$ trên $[a+\varepsilon; b], 0 < \varepsilon < b-a$. Khi đó

- Tích phân $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ.

- Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ.

**Định lý 3.** Giả sử $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$ trên $[a+\varepsilon; b], 0 < \varepsilon < b-a$ và tồn tại $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A(0 \le A \le +\infty)$. Khi đó với $0 < A < +\infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

Ta cũng xét trường hợp tương tự cho $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$ trên $[a; b-\varepsilon], 0 < \varepsilon < b-a$.

Nghĩa là $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = A(0 \le A \le +\infty)$. Khi đó với $0 < A < +\infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

♦ **Ví dụ:**

a/ Xét tích phân $\int_0^1 \frac{\sin^2 x+1}{x^2}dx$

Ta có $\frac{\sin^2 x+1}{x^2} \le \frac{1}{x^2}, \forall x > 0$, mà $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ phân kỳ, suy ra $\int_0^1 \frac{\sin^2 x+1}{x^2}dx$ phân kỳ.

b/ Xét tích phân $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

Xét $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$ và $\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}} > 0$.

Mà $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$ hội tụ theo ví dụ $\int_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^\alpha}dx, (b > a)$. Nên $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ phân kỳ.

## BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 2

--------

1. Tính các tích phân:

$a/\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$ $\quad$ $b/\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$c/\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ $\quad$ $d/\int x.e^{-x^2}dx$

$e/\int \frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}$ $\quad$ $f/\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$

$g/\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{16-e^x}}dx$ $\quad$ $h/\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.\frac{dx}{1+x}$

2. Tính các tích phân:

$a/\int x\ln x dx$ $\quad$ $b/\int x^n \ln x dx$

$c/\int x^2 \arctan x dx$ $\quad$ $d/\int \sqrt{x}\ln x dx$

$e/\int x^2 e^{-2x}dx$ $\quad$ $f/\int e^{2x}\cos x dx$

$g/\int x\sin\sqrt{x}dx$ $\quad$ $h/\int \cos(\ln x)dx$

3. Tính các tích phân

$a/\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$ $\quad$ $b/\int \frac{dx}{(x^2-6x+18)}$

$c/\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$ $\quad$ $d/\int \frac{x+2}{x(x+3)}dx$

$e/\int \cos^4 x dx$

4. Tính các tích phân:

a/ $\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x}dx$; $\quad$ b/ $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$;

c/ $\int_{-2}^{-3}\frac{dx}{x^2-1}$; $\quad$ d/ $\int_{0}^{1}\frac{dx}{5+4x+x^2}$;

e/ $\int_{0}^{1}\frac{dx}{2-3x+x^2}$

5. Tính các tích phân:

a/ $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$; $\quad$ b/ $\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

c/ $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;  d/ $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$;

e/ $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$;  f/ $\int_1^e \cos(\ln x)dx$;

g/ $\int_0^3 \arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}})dx$;  h/ $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$;

i/ $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$.

6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a/ $x^2+y^2=a^2; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

b/ $y=x^3, y=x, y=2x$

c/ $y^2+x^2=4x, y^2=2x$.

7. Tính độ dài đường cong phẳng: $y=\ln\cos x, 0\le x\le \frac{\pi}{6}$.

8. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi: $y=2x-x^2, y=0$ khi quay quanh Ox, quay quanh Oy.

9. Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctanx}}{x^2+1}dx$;  b/ $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4}$;

c/ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$;  d/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

e/ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$;  f/ $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$;

g/ $\int_0^{+\infty} \frac{(2x+1)dx}{(x+2)^2}$;  h/ $\int_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$;

i/ $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$;  k/ $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx$.

10. Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^2 \frac{x^5dx}{x\sqrt{x^2-4}}$,  b/ $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$;

c/ $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$;   d/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$;

e/ $\int_0^1 x\ln x dx$;   f/ $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$.

11. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a/ $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$;   b/ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

c/ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$;   d/ $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{x^n}$;

e/ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$;   f/ $\int_0^1 \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

g/ $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})dx}{e^{\sin x}-1}$;   h/ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x+1}dx$.

12. Tính các tích phân sau

a/ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$;   b/ $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

c/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;   d/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$;

e/ $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;   f/ $I=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx; J=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$;

g/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$;   h/ $\int_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$.

## CHƯƠNG 3
## LÝ THUYẾT CHUỖI

---------

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:
- Hiểu khái niệm về chuỗi số, chuỗi lũy thừa.
- Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số; tìm được miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

### 3.1. Chuỗi số

#### 3.1.1. Định nghĩa

Cho một dãy vô hạn các số $u_1,...u_n,...$ Khi đó biểu $u_1+...+u_n+...$ được gọi là chuỗi số. Kí hiệu $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (1).

Các số $u_1,...u_n,...$được gọi là các số hạng của chuỗi số (1), $u_n$ gọi là số hạng tổng quát của chuỗi. $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ là tổng riêng thứ n của chuỗi, $r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+...$gọi là phần dư thứ n của chuỗi.

Xét dãy tổng riêng $\{S_n\}$ khi $n\to\infty$, nếu dãy đó có giới hạn xác định bằng S, nghĩa là $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ thì ta nói rằng chuỗi (1) hội tụ, S là tổng của nó và ta viết $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ .

Khi $n\to\infty$, nếu dãy $\{S_n\}$ không dẫn tới một giới hạn xác định thì ta nói rằng chuỗi số (1) phân kỳ.

Trong trường hợp chuỗi số (1) hội tụ thì $r_n=S-S_n$.

Ví dụ 1. Cho chuỗi số $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...$

Số hạng tổng quát: $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$

Tổng riêng thứ n: $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

Tổng $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Ví dụ 2. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a.q^{n-1}\quad(a\neq 0)$

Chuỗi đã cho có thể viết: $a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+....$

Đây là cấp số nhân lùi vô hạn công bội q.

Tổng riêng thứ n: $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = a\dfrac{q^n - 1}{q-1}$.

Giới hạn của tổng riêng: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{q^n-1}{q-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}; khi |q| < 1 \\ \infty; khi |q| > 1 \end{cases}$

Vậy nếu $|q| < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ và có tổng $S = \dfrac{a}{1-q}$. Nếu $|q| > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

### 3.1.2. Các định lý về chuỗi số hội tụ

♦**Định lý. (Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ)**

Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì số hạng tổng quát $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Tức là $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Như vậy, có nghĩa là nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi phân kỳ, còn nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi có thể hội tụ cũng có thể phân kỳ.

♦ **Ví dụ:**

a/ Cho chuỗi số $\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{5}{11} + \dfrac{7}{14} + ...$

Số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{2}{3} \neq 0$. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

b/ Cho chuỗi số $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{12}} + ...$

Có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Vậy chuỗi đã cho có thể hội tụ, có thể phân kỳ.

### 3.1.3. Các tính chất về chuỗi số hội tụ

♦ **Tính chất 1.** Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ (a là hằng số) cũng hội tụ và tổng là a.S.

♦ **Tính chất 2.** Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ và chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi số hội tụ, có tổng là S' và S'' thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ cũng hội tụ và có tổng là S' ± S''.

*Chú ý:

- Tổng hai chuỗi phân kỳ có thể phân kỳ cũng có thể hội tụ.

- Tổng một chuỗi hội tụ và một chuỗi phân kỳ là chuỗi phân kỳ.

♦ **Tính chất 3.** Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi ta thêm hoặc bớt đi một số hữu hạn các số hạng đầu tiên của chuỗi.

Nghĩa là: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ với m hữu hạn thì hai chuỗi sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

*Chú ý:

Tính hội tụ không thay đổi nhưng tổng của chuỗi thay đổi. Do đó khi tìm tổng của chuỗi số phải để ý xem n bắt đầu từ bao nhiêu vì nếu thừa hoặc thiếu một vài số hạng đầu sẽ ảnh hưởng tới tổng của chuỗi (nếu có).

### 3.1.4. Chuỗi số dương

#### 3.1.4.1. Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu mọi số hạng của nó điều dương.

Trong trường hợp mọi số hạng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ đều là các số âm thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gọi là chuỗi số âm. Nhưng do tính chất 1 của chuỗi số đã có, dễ dàng suy ra sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số âm từ sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số dương. Do đó chỉ xét chuỗi số dương.

Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Ta có $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, vì $u_{n+1} > 0$ theo giả thiết nên $S_{n+1} > S_n$.

Vậy $S_n$ là một hàm đơn điệu tăng theo n. Do đó nếu tổng riêng $S_n$ bị chặn trên thì tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Vậy nếu tổng riêng của một chuỗi số dương bị chặn trên thì chuỗi số đó hội tụ.

#### 3.1.4.2. Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

♦ **Định lí 1.** (Tiêu chuẩn so sánh)

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử $u_n \le v_n$ với mọi $n \ge n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$). Khi đó nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

*Chú ý: Người ta thường so sánh chuỗi số dương đã cho với các chuỗi số sau:

a/ $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a>0,\ q>0)$ hội tụ khi q<1, phân kỳ khi $q\geq 1$.

b/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $\alpha\leq 1$. Khi $\alpha=1$ ta có chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^n}$.

Đây là chuỗi số dương, ta có: $u_n<\frac{1}{n.2^n}<\frac{1}{2^n}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Ta có $u_n=\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}\ (n>3)$. Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ phân kỳ.

♦ **Định lí 2.** (Tiêu chuẩn tương đương)

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$. Giả sử tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$.

- Nếu $0<k<\infty$ thì các chuỗi đã cho đồng thời hội tụ, hay phân kỳ.

- Nếu k=0 và nếu $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cũng hội tụ.

- Nếu k=+$\infty$ và nếu $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)3^n}$.

Số hạn tổng quát $u_n=\frac{2n}{(n+1).3^n}$

Ta có $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{(n+1).3^n}:\frac{1}{3^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$.

Mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ hội tụ nên chuỗi số đã cho hội tụ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a.}\tan\frac{\pi}{n}$.

Với $n \geq 3$ thì $\tan\dfrac{\pi}{n}>0$, chuỗi đã cho là chuỗi số dương có $u_n = a.\tan\dfrac{\pi}{n}$.

Ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\tan\dfrac{\pi}{n}:\dfrac{\pi}{n}\right)=a$.

Nếu $a \neq 0$, vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{n}$ phân kỳ nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Nếu $a=0$, chuỗi đã cho có $S_n = 0 \to 0$ nên hội tụ.

♦ **Định lí 3.** (Tiêu chuẩn Đalambe)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=D$ thì chuỗi đã cho hội tụ khi D<1, phân kỳ khi D>1.

Nếu D=1 thì phải xét thêm bằng phương pháp khác.

*Chú ý: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ thì chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số dương sau:

a/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n+1}$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5^{n+1}}{n+2}:\dfrac{5^n}{n+1}\right)=5>1$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

b/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{3^n n!}$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}3^n n!}{3^{n+1}(n+1)!n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{e}{3}<1$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

♦ **Định lí 4.** (Tiêu chuẩn Côsi)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$ thì chuỗi đã cho hội tụ khi C<1, phân kỳ khi C>1.

Nếu C=1 thì phải xét thêm bằng phương pháp khác.

*Chú ý: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau bằng tiêu chuẩn Côsi:

a/ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.\frac{1}{2^n}$

Ta có $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.\frac{1}{2^n}$

Theo tiêu chuẩn Côsi : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.\frac{1}{2}=\frac{e}{2}>1.$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

b/ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^{2n}$

Ta có $u_n=\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^{2n}$

Theo tiêu chuẩn Côsi : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^{2}=\frac{9}{25}<1$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

♦ **Định lí 5.** (Tiêu chuẩn Tích phân)

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ , mà các số hạng $u$ của nó là giá trị của một hàm liên tục f(x) tại các trị số nguyên của đối số, và hàm f(x) đơn điệu giảm trong $(1;+\infty)$. Khi đó:

- Nếu $\int_{1}^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

- Nếu $\int_{1}^{+\infty}f(x)dx$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

*Chú ý: Nếu tồn tại hàm f(x) sao cho $u_n$=f(n) với mọi $n\ge n_0$ và f(x) liên tục, đơn điệu giảm trên miền $(n_0;+\infty)$ thì $\int_{n_0}^{+\infty}f(x)dx$ và $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ta biết $\int_{n_0}^{+\infty}\frac{du}{u^k}$ hội tụ khi k>1, phân kỳ khi $k\le 1$. Hoặc có thể dung định nghĩa để xem tích phân hội tụ hay phân kỳ.

Ví dụ. Dùng tiêu chuẩn tích phân để xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.\ln^k n}$

Xét hàm $f(x)=\frac{1}{x\ln^k x}$ liên tục với mọi $x\geq 2$ thì $f(n)=u_n$ với mọi $n\geq 2$.

Ta có: $f'(x)=-\frac{\ln^k x+k\ln^{k-1}x}{\left(x\ln^k x\right)^2}$, với k là hằng số tùy ý, bao giờ cũng tồn tại một số $x_0$ sao cho $\forall x>x_0$ ta luôn có $\frac{\ln^{k-1}x(\ln x+k)}{\left(x\ln^k x\right)^2}>0$.

Vậy $f'(x)<0,\forall k$ và x đủ lớn. Chứng tỏ f(x) đơn điệu giảm.

Ta có $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^k x}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^k x}$ hội tụ khi k>1 và phân kỳ khi $k\leq 1$.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi k>1 và phân kỳ khi $k\leq 1$.

**3.1.5. Chuỗi số dấu bất kỳ**

**3.1.5.1. Chuỗi đan dấu**

♦ **Định nghĩa.** Ta gọi chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng: $\pm(u_1-u_2+u_3-...)$, trong đó $u_1,u_2,u_3,...$ là các số dương.

Dĩ nhiên ta chỉ cần xét chuỗi đan dấu với số hạng đầu tiên dương $u_1-u_2+u_3-...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$.

♦ **Định lý Lepnit.** (Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu)

Cho chuỗi số đan dấu $u_1-u_2+u_3-...$Nếu dãy số $u_1,u_2,u_3,...$ đơn điệu giảm, nghĩa là $u_1>u_2>u_3>...$ và $u_n\to 0$ khi $n\to\infty$ thì chuỗi số đã cho hội tụ và tổng của nó không vượt quá số hạng đầu tiên.

Ví dụ. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Số hạng tổng quát $u_n=\frac{1}{n}$.

Đây là chuỗi đan dấu có dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm vì $u_n>u_{n+1}$ và $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

**3.1.5.2. Chuỗi số dấu bất kỳ, sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ**

♦ **Định nghĩa.** Chuỗi có dấu bất kỳ là chuỗi số mà các số hạng của nó là những số thực có dấu bất kỳ.

♦ **Định lý.** Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cũng hội tụ.

*Chú ý:

Điều kiện chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ chỉ là điều kiện đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ chứ không phải là điều kiện cần, nghĩa là có thể chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ.

Ví dụ. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ hội tụ theo định lý Lepnit, nhưng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi số điều hòa, nó phân kỳ.

♦ **Định nghĩa.** Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ còn chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là bán hội tụ.

♦ **Ví dụ:**

a/ Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ bán hội tụ.

b/ Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Lập chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$

Với $n \geq 1$, ta có $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân.

Suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

* Chú ý: Nếu dung tiêu chuẩn Đalambe hay Côsi mà biết được $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

### 3.2. Chuỗi lũy thừa

#### 3.2.1. Định nghĩa

##### 3.2.1.1. Chuỗi hàm số

Chuỗi hàm số là chuỗi mà các số hạng của nó là những hàm của biến độc lập x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots (1)$$

**3.2.1.2. Chuỗi lũy thừa**

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots (2).$$

Ta chỉ xét chuỗi lũy thừa với $x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots (3)$.

Vì mọi chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, bằng phép biến đổi $x - x_0 = \overline{x}$, đều đưa được về dạng (3).

**3.2.1.3. Định lý Aben**

Nếu chuỗi lũy thừa dạng (3) hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x thỏa mãn bất đẳng thức $|x| < |x_0|$.

*Hệ quả. Nếu chuỗi lũy thừa (3) phân kỳ tại $x = x_0$ thì nó sẽ phân kỳ tại mọi x thỏa mãn $|x| < |x_0|$.

**3.2.2. Bán kính hội tụ**

**3.2.2.1. Định nghĩa**

Số r $(0 \leq r \leq +\infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa (3) hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-r; r)$ và phân kỳ trong các khoảng $(-\infty; -r)$, $(r; +\infty)$. Tại $x = -r$ và $x = r$, chuỗi (3) có thể hội tụ, có thể phân kỳ. Số r nói trên được gọi là bán kính hội tụ, khoảng $(-r; r)$ gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa (3). Do đó: Muốn tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa (3) ta tìm khoảng hội tụ, rồi xét thêm sự hội tụ tại hai điểm mút (miền hội tụ là tập hợp tất cả các điểm hội tụ).

**3.2.2.2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa**

- **Định lý.** Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$) thì bán kính hội tụ r của chuỗi lũy thừa (3) được xác định như sau:

$$r = \begin{cases} 1/\rho \; khi \; 0 < \rho < +\infty \\ 0 \quad khi \; \rho = +\infty \\ +\infty \; khi \; \rho = 0 \end{cases}$$

Giả sử biết bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là r, khi đó $(-r; r)$ được gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa. Muốn xác định miền hội tụ ta phải xét cụ thể các chuỗi số tương ứng với các giá trị tại các đầu mút của khoảng hội tụ.

Nếu có vô số các hệ số $a_n = 0$, thì ta phải tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa theo các bước sau:

**Bước 1:** Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$, giả sử chúng có giới hạn là $|u(x)|$.

**Bước 2:** Giải bất phương trình $|u(x)|<1$. Nghiệm của bất phương trình này là những điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa (khoảng hội tụ).

**Bước 3:** Xét tại các điểm biên là nghiệm của phương trình $|u(x)|=1$.

**Bước 4:** Kết luận về miền hội tụ của chuỗi lũy thừa. (Hiển nhiên với những điểm là nghiệm của bất phương trình $|u(x)|>1$ là những điểm phân kỳ).

- Ví dụ: Xét miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-8}$

Cách 1. Dùng quy tắc tìm bán kính hội tụ suy ra khoảng hội tụ, sau đó xét tại các đầu mút để kết luận về miền hội tụ.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{6n-8}{6n-2}\right| = 1$

Vậy bán kính hội tụ là r=1, suy ra khoảng hội tụ (-1;1).

Tại x=1, chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{6n-8}$. Đây là chuỗi số đan dấu, hội tụ theo tiêu chuẩn Lepnit.

Tại x=-1, chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{6n-8} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n-8}$. Đây là chuỗi số dương, phân kỳ vì tương đương với chuỗi điều hòa.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $-1 < x \le 1$.

Cách 2. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{6n-2}:(-1)^n\frac{x^n}{6n-8}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(6n-8)}{x^n(6n-2)}\right| = |x|$.

Giải bất phương trình $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$, suy ra khoảng hội tụ là (-1;1). Tiếp tục xét tại các đầu múc như cách 1, ta cũng thu được miền hội tụ là $-1<x\le 1$

Ví dụ 2. Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. (1)

Cách 1. Đặt $\overline{x}=x+1$. Khi đó (1) được viết lại là $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{x}^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\ln^2(n+1)}{(n+2)\ln^2(n+2)}\right|=1$. Do đó bán kính hội tụ r=1, suy ra khoảng hội tụ đang xét là (-1;1). Từ đó suy ra khoảng hội tụ của chuỗi (1) là $-1<x+1<1\Leftrightarrow -2<x<0$.

Tại x=-2, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Đây là chuỗi đan dấu, hội tụ theo Lepnit.

Tại x=0, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$, đây là chuỗi số dương, hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $[-2;0]$.

Cách 2.

Xét

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+2)\ln^2(n+2)}:\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(x+1)\frac{(n+1)\ln^2(n+1)}{(n+2)\ln^2(n+2)}\right|=|x+1|$$

Giải bất phương trình $|x+1|<1$, suy ra khoảng hội tụ là -2<x<0.

Xét tại hai đầu mút như trên, ta có miền hội tụ là $[-2;0]$.

## BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 3

-------

1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$,

b/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$,

c/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^3(n+1)}$

d/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$

e/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^4+3n+1}}$,

f/ $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$,

g/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n.e^n}$,

h/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$.

i/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\sin(1/n)\right)}{n+\ln^2 n}$,

j/ $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \frac{(3n+2)^n}{(4n+3)^n}$

k/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

l/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

b/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$,

c/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$

d/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$,

e/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$,

f/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ ,

g/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

h/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}$.

3. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi sau:

a/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$

b/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-2)^n}{n+1} x^n$,

c/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

d/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n.3^n}$

e/ $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

f/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$

g/ $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$

h/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1).\sqrt{n+1}}$

i/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$

j/ $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$ .

## Chương 4

## ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

-------

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Tìm đạo hàm, vi phân của hàm nhiều biến.
- Vận dụng đạo hàm và vi phân tìm cực trị, GTLN, GTNN của hàm số; ứng dụng vi phân để tính giá trị gần đúng.

### 4.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

#### 4.1.1. Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Gọi $\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,...n \right\}$ là không gian n chiều ($n \in \mathbb{N}^*$).

Phần tử $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ của $\mathbb{R}^n$ được gọi là điểm hay vectơ, còn $x_i$ (i=1,2,…,n) được gọi là toạ độ thứ i của $x$.

Hai phần tử $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ và $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ được gọi là bằng nhau nếu $x_i = y_i\ (i = 1, 2, ...n)$.

Khoảng cách giữa hai điểm $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ và $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ là số

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Trong tài liệu này, ta sẽ làm việc trên không gian nền gồm tập $\mathbb{R}^n$ được trang bị khoảng cách d(x,y) như trên.

Trong $\mathbb{R}^n$ cho điểm $M_0$ và số thực $\varepsilon > 0$. Lân cận của điểm $M_0$ bán kính $\varepsilon$ là tập hợp $N_\varepsilon(M_0) = \left\{ M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < \varepsilon \right\}$.

*** Định nghĩa:** Gọi S là tập con của $\mathbb{R}^n$ và $M_0 \in \mathbb{R}^n$ **:**

♦ Điểm $M_0$ được gọi là điểm trong của S nếu tồn tại lân cận $N_\varepsilon$ của $M_0$ sao cho $M_0 \in N_\varepsilon \subset S$. Tập S được gọi là mở nếu mọi điểm của nó điều là điểm trong.

♦ Điểm $M_0$ được gọi là điểm biên của S nếu với mọi lân cận $N_\varepsilon$ của $M_0$ đều vừa chứa những điểm thuộc S, vừa chứa những điểm không thuộc S, tức là $N_\varepsilon \cap S \neq \varnothing$, $N_\varepsilon \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus S\right) \neq \varnothing$. Như vậy của S có thể thuộc S, cũng có thể không thuộc S. Tập hợp tất cả các điểm biên của S gọi là biên của S, kí hiệu $\partial$ S.

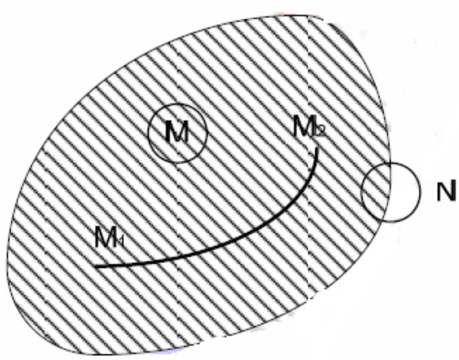
♦ S được gọi là tập đóng nếu mọi điểm biên của S đều là điểm thuộc S, kí hiệu $\overline{S}$.

• Phần trong của S là tập các điểm trong của S.

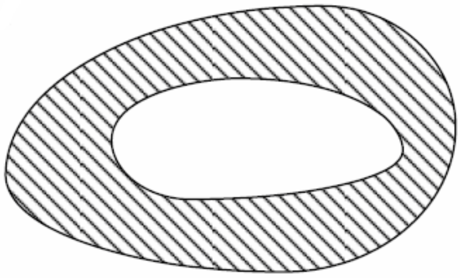
• Tập $S=\left\{M\in\mathbb{R}^n / d(M_o,M)<r\right\}$ (r>0) được gọi là hình cầu mở tâm $M_o$, bán kính r.

• Tập S được gọi là bị chặn nếu tồn tại một hình cầu nào đó chứa nó.

• Tập S gọi là liên thông nếu với mọi cặp điểm $M_1$, $M_2$ trong S đều được nối với nhau bởi một đường cong liên tục nào đó nằm trọn trong S. Tập liên thông S gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (một đường cong kín trong $\mathbb{R}^n$ ; tập liên thông S gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi từ hai mặt kín trở lên rời nhau từng đôi một.



Hình 1


Hình 2

Trong $\mathbb{R}^2$ , tập S trên Hình 1 liên thông, còn tập S trong Hình 2 là không liên thông.

**4.1.2. Hàm nhiều biến**

**4.1.2.1. Định nghĩa**

Cho $\mathbb{R}^n$ và $D\subset\mathbb{R}^n$.

Ánh xạ $f:D\to\mathbb{R}$

$M=\left(x_1,...,x_n\right)\mapsto u=f\left(M\right)=f\left(x_1,...,x_n\right)$

gọi hàm số của n biến số xác định trên D.

Tập D được gọi là tập xác định của hàm f. Đó là tập các điểm $\left(x_1,x_2,...x_n\right)$ sao cho $f\left(x_1,x_2,...x_n\right)$ xác định.

Tập $\left\{f\left(M\right)/M\in D\right\}$ gọi là tập giá trị của hàm số.

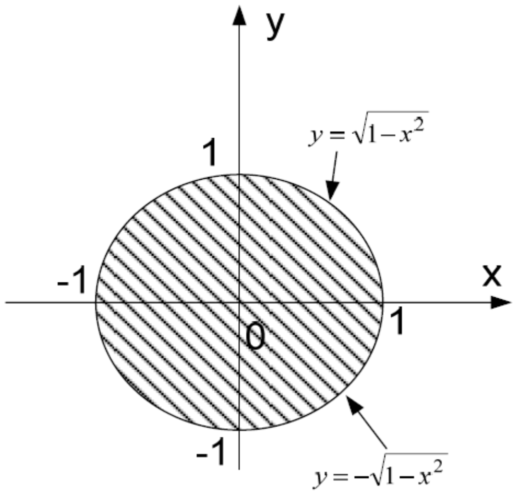
Khi n=2 hoặc n=3 ta thường kí hiệu $z=f\left(x,y\right)$, $u=f\left(x,y,z\right)$.

**4.1.2.2. Ví dụ**

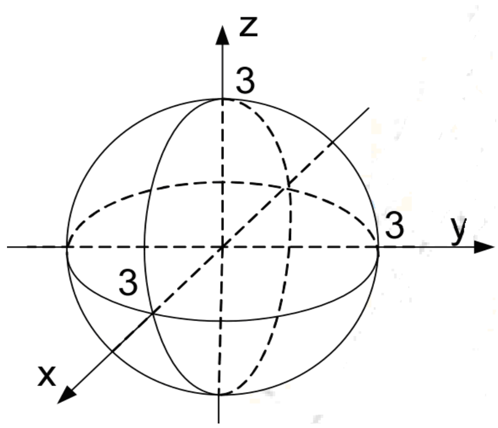
Trong $\mathbb{R}^2$, cho hàm số $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ thì $D=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le1\}$. (hình 3)

Trong $\mathbb{R}^3$, cho hàm số $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$ thì

$$D=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<9\}.\ \text{(hình 4)}$$




Hình 3

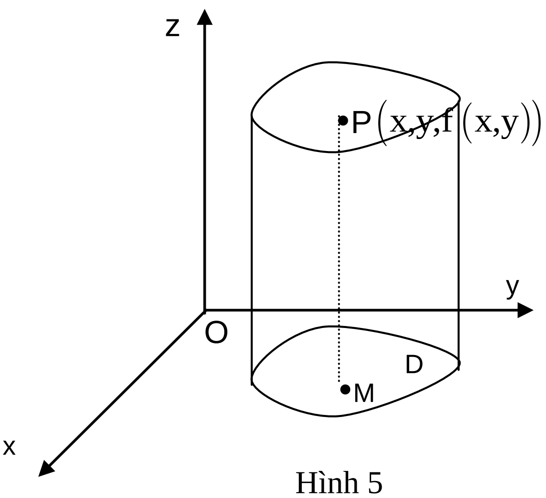



Hình 4

### 4.1.3. Biểu diễn hình học của hàm hai biến

Giả sử hàm hai biến $z=f\left(x,y\right)$ xác định trên miền D. Ta thấy cặp (x,y) biểu diễn một điểm M(x,y) trong mặt phẳng Oxy, nên có thể xem hàm hai biến f(x,y) là hàm của điểm M(x,y). Ta biểu diễn hình học hàm hai biến như sau:

Vẽ hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc Oyxz. Với mọi điểm M(x,y) trong miền D của mặt phẳng Oxy cho tương ứng với một điểm P trong không gian có toạ độ là $\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$. Quỹ tích của điểm P khi M chạy trong miền D được gọi là đồ thị của hàm hai biến $z=f\left(x,y\right)$.

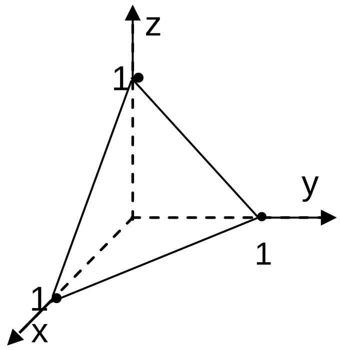



Hình 5

Đồ thị của hàm hai biến thường là một mặt cong trong không gian, mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy là miền xác định của hàm.

**Ví dụ:**

Hàm z=1-x-y ( $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x$ ) có đồ thị là một mặt tam giác với các đỉnh (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). (Hình 6)



Hình 6

**4.1.5. Giới hạn của hàm nhiều biến**

**4.1.5.1. Định nghĩa**

Nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$; kí hiệu $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_n, M_0) = 0$

hay $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$

**4.1.5.2. Định nghĩa**

Cho hàm z = f(M)=f(x,y) xác định trong lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$, có thể trừ tại điểm $M_0$. Ta nói rằng hàm f(M) có giới hạn là L khi M(x,y) dần đến $M_0(x_0,y_0)$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ (khác $M_0$) thuộc lân cận U dần đến $M_0$ ta đều có: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$.

Thường kí hiệu:

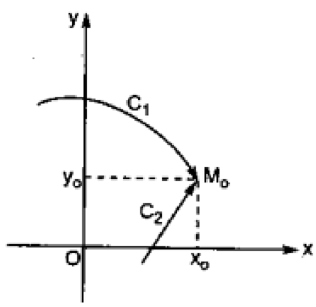
$\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = L$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ hay $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L$.

(Sử dụng ngôn ngữ $\varepsilon, \delta$ ta cũng có định nghĩa sau: Hàm f(M) có giới hạn là L khi $M \to M_0$ khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, M_0) > 0$ sao cho $d(M_0, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon$).

***Chú ý:**

1. Tất cả các khái niệm giới hạn vô hạn hoặc các định lí về giới hạn: tổng, tích, thương đều giống như hàm số một biến số.

2. Từ định nghĩa ta nhận thấy: Giới hạn L của hàm số f(x,y) khi $M \to M_0$ không phụ thuộc đường đi của M tiến đến $M_0$. Vì thế, nếu khi dãy $M_n$ tiến đến $M_0$ trên hai đường $C_1$, $C_2$ khác nhau mà dãy $f(M_n)$ tiến đến hai giới hạn khác nhau thì hàm số không có giới hạn tại $M_0$.



Hình 17

**4.1.5.3. Ví dụ**

1. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

**Giải**

Ta có $M_0(1,1)$ không thuộc miền xác định D của hàm số đã cho.

Xét dãy điểm bất kì $M_k(x_k,y_k)\subset D$ hội tụ đến điểm $M_0(1,1)$, nghĩa là: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1,\ \lim\limits_{k\to\infty} y_k = 1$. Giới hạn của dãy giá trị hàm số tương ứng là:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(M_k\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{x_k^2-y_k^2}{x_k-y_k} = \lim_{k\to\infty}\left(x_k+y_k\right) = 1+1.$$

Vậy hàm số có giới hạn tại $M_0(1,1)$ bằng 2.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f\left(x,y\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

**Giải**

Ta có:

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = \frac{|x+y|}{\left|x^2-xy+y^2\right|} \le \frac{|x+y|}{\left|x^2+y^2\right|-|xy|}$$

$$\le\frac{|x+y|}{2|xy|-|xy|} = \frac{|x+y|}{|xy|} \le \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| \to 0 \text{ khi } \begin{cases} x\to\infty \\ y\to\infty \end{cases}$$

Theo nguyên lý kẹp ta được:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f\left(x,y\right) = \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

Giải

Ta có $D=\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(0,0\right)\right\}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = |x|\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|}{2}$$

Do đó khi $x\to 0$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f\left(x,y\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn tại điểm $M_0(0,0)$:

$$f\left(x,y\right) = \frac{x^2+3y^2}{5xy}$$

**Giải**

Xét dãy điểm $M_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\subset D$ miền xác định của hàm số và dãy điểm này hội tụ đến điểm $M_0(0,0)$. Khi đó dãy hàm số tương ứng có giới hạn là:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_k,y_k\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}{\frac{5}{k^2}}=\frac{4}{5}$$

Mặt khác, xét dãy điểm $N_k\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right)\subset D$.

Dãy giá trị hàm số tương ứng có giới hạn là:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_k,y_k\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}+\frac{12}{k^2}}{\frac{10}{k^2}}=\frac{13}{10}$$

Vậy theo định nghĩa hàm số đã cho không có giới hạn tại điểm $M_0(0,0)$.

**4.1.6. Tính liên tục của hàm số nhiều biến số**

**4.1.6.1. Định nghĩa**

Giả sử $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, điểm $M_0$ thuộc D.

Hàm số f được gọi là liên tục tại $M_0$ nếu:

i) $M_0\in D$ (tức là tồn tại giá trị $f(M_o)$)

ii) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

iii) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f\left(M_0\right)$.

Giả sử hàm số f(M) xác định trên miền D. Nói rằng hàm số liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm $M\in D$.

Hàm số f(M) liên tục trên miền đóng $\overline{D}$ nếu nó liên tục trên miền D và liên tục tại mọi điểm $N\in\partial D$.

***Chú ý:** Với $M_0(x_0, y_0)$, gọi: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, là các số gia của các biến độc lập x, y và $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ là số gia toàn phần của hàm số f(x,y) tương ứng với các số gia $\Delta x$, $\Delta y$. Khi đó hàm số f(x,y) liên tục tại $(x_0,y_0)$ nếu nó xác định tại $(x_0,y_0)$ và $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=0$.

**4.1.6.2. Định nghĩa**

Hàm số u=f(M) được gọi là gián đoạn tại $M_0$ nếu nó không liên tục tại điểm này.

Như vậy hàm u=f(M) gián đoạn tại $M_0$ nếu:

i) Hoặc không xác định tại $M_0$.

ii) Hoặc hàm xác định tại $M_0$ nhưng không tồn tại $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

iii) Hoặc hàm xác định tại $M_0$ nhưng $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) \neq f\left(M_0\right)$.

**4.1.6.3. Ví dụ**

Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=y=0\end{cases}$

**Giải**

Hàm số $f\left(x,y\right)$ liên tục tại mọi điểm $x^2+y^2\neq 0$.

Xét tính liên tục của $f\left(x,y\right)$ tại (0,0):

Ta có: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f\left(0,0\right)$

Vậy $f\left(x,y\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=y=0\end{cases}$

trong đó $\alpha$ là hằng số dương.

**Giải**

Hàm số $f\left(x,y\right)$ liên tục tại mọi điểm $x^2+y^2\neq 0$.

Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x,y\right)$ tại điểm (0,0).

Ta có $|xy|\leq\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\left|f\left(x,y\right)\right|\leq\dfrac{1}{2^{\alpha}}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}$

Nếu $\alpha>1$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=0=f\left(0,0\right)$.

Vậy $f\left(x,y\right)$ liên tục tại điểm (0,0).

Nếu $\alpha\leq 1$ thì

Ta có: $f\left(x,x\right)=\dfrac{x^{2\alpha}}{2x^2}=\dfrac{1}{2x^{2(1-\alpha)}}$. Nên $f\left(x,x\right)$ không dần tới 0 khi $x\longrightarrow 0$.

Vậy $f\left(x,y\right)$ không liên tục tại (0,0).

## 4.2. Đạo hàm và vi phân

### 4.2.1. Đạo hàm riêng

#### 4.2.1.1. Định nghĩa

Cho Z= f(x,y) xác định trong miền D và $M_0(x_0,y_0) \in D$. Cố định $y=y_0$, nếu hàm $f(x,y_0)$ có đạo hàm theo biến x tại $x=x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm f(x,y) theo biến x tại $M_0(x_0,y_0)$.

Ký hiệu: $Z'_x$, $f_x'(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial Z}{\partial x}(x_0,y_0)$, tức là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Tương tự: Cố định $x=x_0$, nếu hàm $f(x_0,y)$ có đạo hàm theo biến y tại $y=y_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm f(x,y) theo biến y tại $M_0(x_0, y_0)$.

Ký hiệu : $Z'_y$, $f_y'(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial Z}{\partial y}(x_0,y_0)$. tức là

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Một cách tổng quát, ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm riêng ra đối với hàm n biến với $n\geq 3$. Chẳng hạn, đạo hàm riêng theo biến z của hàm $u=f\left(x,y,z\right)$ tại $M_0(x_0, y_0,z_0)$ là:

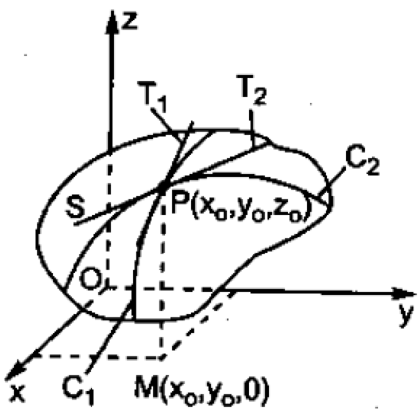
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta y)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}$$

*** Nhận xét:** Như vậy khi tính đạo hàm riêng theo biến x tại $(x_0,y_0)$ bằng cách coi $y=y_0$ là hằng số và tính đạo hàm của hàm một biến $f(x,y_0)$ tại $x=x_o$. Tương tự, tính đạo hàm riêng theo biến y tại $(x_0,y_0)$ ta tính đạo hàm của hàm một biến $f(x,y_0)$ tại $y=y_o$ (xem $x=x_o$ là hằng số).

Như vậy, theo nhận xét trên thì các quy tắc và công thức tính đạo hàm riêng cũng giống như quy tắc và các công thức tính đạo hàm hàm một biến.

#### 4.2.1.2. Ý nghĩa

Gọi S là đồ thị của hàm số $Z=f\left(x,y\right)$, $C_1$ là giao tuyến của S và mặt phẳng $y=y_0$, $C_1$ chính là đồ thị của hàm số một biến số $f\left(x,y_0\right)$ trên mặt phẳng $y=y_0$. Do



Hình 18

đó đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$ là hệ số góc của đường tiếp tuyến $T_1$ của $C_1$ tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$ trong đó $Z_0=f(x_0,y_0)$. Còn đạo hàm riêng $f'_y(x_0,y_0)$ là hệ số góc của đường tiếp tuyến $T_2$ của $C_2$ của mặt S với mặt phẳng $x=x_0$ tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$.

Đạo hàm riêng của hàm số z=f(x,y) theo biến x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ cũng biểu thị vận tốc biến thiên của hàm số $Z=f(x,y)$ theo hướng x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$, còn đạo hàm riêng của hàm số Z=f(x,y) theo biến y tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ biểu thị vận tốc biến thiên của hàm số $Z=f(x,y)$ theo hướng y tại điểm $M_0(x_0,y_0)$,

**4.2.1.3. Ví dụ**

a) Tìm đạo hàm riêng của hàm số $Z = \ln\tan\dfrac{x}{y}$ .

b) Tìm đạo hàm riêng của hàm số $u=e^{x^2y}\cos z$ .

c) Tìm đạo hàm riêng của hàm số $u=\text{acrtan}(x-y)^z$ .

**4.2.1.4. Đạo hàm riêng cấp cao**

♦ **Định nghĩa**

Giả sử hàm $Z=f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $Z'_x$, $Z'_y$. Các đạo hàm riêng này được gọi là đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $Z=f(x,y)$. Chúng cũng là các hàm số theo biến x, y. Vì vậy có thể xét đạo hàm riêng của chúng: $(Z'_x)'_x$, $(Z'_x)'_y$, $(Z'_y)'_x$, $(Z'_y)'_y$ gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $Z=f(x,y)$. Ta dùng các kí hiệu sau:

$$(Z'_x)'_x = Z''_{xx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},\ (Z'_x)'_y = Z''_{xy} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y},$$

$$(Z'_y)'_x = Z''_{yx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x},\ (Z'_y)'_y = Z''_{yy} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

Tổng quát, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp (n-1) của hàm $Z=f(x,y)$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp n của hàm Z.

♦ **Định lí 1.** (Định lí Schwartz)

Nếu hàm $Z=f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ trong miền D và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại $(x_0,y_0)\in D$ thì

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0,y_0).$$

Định lí Schwartz còn được mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến và cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn. Chẳng hạn, hàm số $u=f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng cấp 3 liên tục tại điểm $(x_0,y_0,z_0) \in D$ thì

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0)$$

♦**Ví dụ:**

Tính đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

a) $Z=f(x,y)=x^2e^y+x^3y^2-y^5$.

b) $Z=f(x,y)=e^{\sin\frac{y}{x}}+\arctan xy$.

c) $u=f(x,y,z)=z^2e^{x-yz}$ .

### 4.2.2. Vi phân

#### 4.2.2.1. Định nghĩa

Cho hàm số $Z=f(x,y)$ xác định trong miền D và $(x_0,y_0) \in D$. Cho x số gia $\Delta x$, y số gia $\Delta y$ sao cho $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) \in D$.

Hàm $Z=f(x,y)$ được gọi là khả vi tại $(x_0,y_0)$ nếu số gia toàn phần

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

có thể viết dưới dạng:

$$\Delta f=A.\Delta x+B.\Delta y+\alpha.\Delta x+\beta.\Delta y$$

trong đó, A, B là các hằng số; $\alpha, \beta \to 0$ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Khi đó đại lượng $A.\Delta x+B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm $Z=f(x,y)$ tại $(x_0,y_0)$ và kí hiệu là $df(x_0,y_0)$ hay dz. Ta có:

$$dz=df(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y$$

Hàm $Z=f(x,y)$ gọi là khả vi trong miền D nếu $Z=f(x,y)$ khả vi tại mọi điểm $(x,y) \in D$.

***Nhận xét:**

Từ định nghĩa trên, ta có:

Hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$.

#### 4.2.2.2. Điều kiện khả vi của hàm số

***Điều kiện cần**

♦ **Định lí 2:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại $(x_0,y_0)$ thì hàm $Z=f(x,y)$ liên tục tại $(x_0,y_0)$.

♦ **Định lí 3:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại $(x_0,y_0)$ thì tại đó tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ và có

$$\boxed{df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y}$$

***Nhận xét:**

i) Nếu hàm số $Z=f(x,y)=x$ thì $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=1$ và $\dfrac{\partial Z}{\partial y}=0$. Ta có

$$dx=dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y=\Delta x$$

Tương tự, nếu hàm số $Z=f(x,y)=y$ thì $\dfrac{\partial Z}{\partial y}=1$ và $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=0$. Ta có

$$dy=dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y=\Delta y.$$

Do đó vi phân của hàm $Z=f(x,y)$ thường được viết dưới dạng:

$$\boxed{dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy}$$

ii) Biểu thức vi phân có thể mở rộng cho hàm nhiều biến $n\geq 3$ biến. Chẳng hạn

▪ Với hàm ba biến $u=f(x,y,z)$, ta có:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Với hàm n biến $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, ta có:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

Theo định lí 3 thì hàm $Z=f(x,y)$ khả vi tại $(x_0,y_0)$ thì tại $(x_0,y_0)$ tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$. Tuy nhiên sự tồn tại các đạo hàm riêng này không đủ để khẳng định rằng hàm $Z=f(x,y)$ khả vi tại $(x_0,y_0)$.

Chẳng hạn xét hàm $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ tại (0,0). Ta có:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

Tương tự, $f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta x)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

Nhưng hàm $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ không khả vi tại (0,0), thật vậy:

Xét $\dfrac{\Delta f-\left[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

Lấy $\Delta x=\Delta y$ thì $\dfrac{\Delta f-\left[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\dfrac{\Delta x^{2/3}}{2|\Delta x|}\to\infty$.

***Điều kiện đủ**

♦ **Định lí 4:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ có tại các đạo hàm riêng ở lân cận điểm $(x_0,y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại $(x_0,y_0)$ thì $Z=f(x,y)$ khả vi tại $(x_0,y_0)$.

*** Chú ý:** Ta có các công thức tính vi phân của hàm hai biến giống như ở hàm một biến.

$$d(au)=adu$$
$$d(u\pm v)=du\pm dv$$
$$d(uv)=vdu+udv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

Nhờ các công thức trên ta có thể rút ngắn việc tính vi phân của hàm hai biến.

**4.2.2.3. Ví dụ**

1) Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

a) $Z=\sqrt{x^2+y^2}$.

b) $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

2) Tính vi phân toàn phần của hàm số: $Z=f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ tại $M_0(1,2)$ biết $\Delta x=0,1;\ \Delta y=0,2$.

**4.2.2.4. Ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng**

Giả sử hàm số $Z=f\left(x,y\right)$ khả vi tại $\left(x_0,y_0\right)$. Ta có:

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\alpha\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Trong đó $\alpha\to 0$ khi $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$

Khi $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ khá bé thì

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\approx f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y$$

Ta có công thức xấp xỉ

$$\boxed{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y}$$

**Ví dụ:**

Tính giá trị gần đúng của $\arctan\dfrac{1,02}{0,95}$.

**Giải**

Xét hàm $f\left(x,y\right)=\arctan\dfrac{x}{y}$, ta có

$$f'_x\left(x,y\right)=\frac{y}{x^2+y^2};\ f'_y\left(x,y\right)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Khi đó ta được công thức tính gần đúng

$$\arctan\frac{x_0+\Delta x}{y_0+\Delta y}\approx\arctan\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\Delta x+\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\Delta y$$

Nếu chọn

$$x_0=1,\ \Delta x=0,02$$
$$y_0=1,\ \Delta y=-0,05$$

thì $\arctan\dfrac{1,02}{0,95}\approx\arctan\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}.(0,02)+\dfrac{1}{2}(-0,05)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{0,7}{2}\approx 0,82$.

### 4.2.2.5. Vi phân cấp cao

♦ **Định nghĩa**

Giả sử hàm số $Z=f\left(x,y\right)$ khả vi. Khi vi phân toàn phần $dZ=\dfrac{\partial Z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial Z}{\partial y}dy$ cũng là hàm của hai biến x, y. Nếu dZ có vi phân toàn phần thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp hai của Z, kí hiệu $d^2Z$. Ta có

$$d^2Z=d(dZ).$$

Tổng quát, vi phân của vi phân cấp n-1 của hàm Z được gọi là vi phân cấp n hay n lần khả vi.

$$d^nZ=d(d^{n-1}Z).$$

Hàm số có vi phân cấp n được gọi là khả vi đến cấp n hay n lần khả vi.

♦ **Công thức tính vi phân cấp cao**

Giả sử hàm số $Z=f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục. Ta có:

$$dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy \text{ với dx, dy không đổi.}$$

Suy ra

$$d^2Z=d(dZ)=d\left(\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy^2$$

$$\overset{\text{Kí hiệu}}{=}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

Tương tự đối với vi phân cấp cao hơn hai, ta đi đến công thức tổng quát

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

***Chú ý:**

i) Công thức trên vi phân cấp cao kí hiệu như trên được hiểu một cách hình thức là luỹ thừa bậc n của một nhị thức. Sau khi khai triển hàm z được đặt vào trong dấu $\partial$.

ii) Nếu x, y lại là hàm của hai biến độc lập s, t nào đó thì công thức trên không còn đúng khi $n\geq 2$.

♦ **Ví dụ:**

Tính vi phân cấp 2 của hàm số $Z=f(x,y)=e^x.\sin y$

**4.2.3. Đạo hàm của hàm hợp**

**4.2.3.1. Định nghĩa**

Cho hàm $Z=f(u,v)$ trong đó $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ là hàm của hai biến độc lập x, y. Khi đó $Z=f\left[u(x,y),v(x,y)\right]$ là hàm hợp của hai biến x, y qua hai biến trung gian x, y.

**4.2.3.2. Định lí 5**

Cho hàm $Z=f(u,v)$ trong đó $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Nếu các hàm $f(u,v)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đối với các biến của chúng thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial Z}{\partial x},\frac{\partial Z}{\partial y}$ và có

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

***Chú ý:**

i) Nếu $\mathrm{Z=f}\left(\mathrm{u,v}\right)$ với $\mathrm{u=u}\left(\mathrm{x}\right)$, $\mathrm{v=v}\left(\mathrm{x}\right)$ là các hàm của x thì $\mathrm{Z=f}\left[\mathrm{u}\left(\mathrm{x}\right),\mathrm{v}\left(\mathrm{x}\right)\right]$ là hàm một biến theo x. Khi đó $\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{dx}}$ được gọi là đạo hàm toàn phần của Z theo x.

$$\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{dx}}=\frac{\partial Z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

ii) Từ định lí 5, ta có thể biểu diễn dạng phương trình ma trận sau

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial x}\\ \frac{\partial Z}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial u}\\ \frac{\partial Z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

Ma trận $\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ gọi là ma trận Jacobian của u, v đối với x, y và định thức của ma trận này gọi là định thức Jacobian của u, v đối với x, y được kí hiệu $\mathrm{J}=\frac{\partial\left(\mathrm{u,v}\right)}{\partial\left(\mathrm{x,y}\right)}$.

**4.2.3.3. Ví dụ:**

1) Cho hàm số $\mathrm{Z=e^{u}.sinv}$ với u=xy, v=x+y. Hãy tính $\frac{\partial Z}{\partial \mathrm{x}}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$.

2) Cho hàm số $Z=e^{x^2+y}$ với $\mathrm{x=t^2}$, $\mathrm{y=lnt}$. Tính $\frac{\partial Z}{\partial \mathrm{t}}$.

**4.2.4. Đạo hàm của hàm ẩn**

**4.2.4.1. Định nghĩa**

Nếu hai giá trị của 2 biến x, y quan hệ với nhau bới hệ thức F(x,y) =0, ở đây coi F(x,y) như một hàm 2 biến xác định trên miền $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^2$.

Nếu với mỗi $x=x_0\in X$ xác định đúng một giá trị $y=y_0$ sao cho $F(x_0,y_0)=0$ thì hệ thức F(x,y) xác định hàm một biến y = y(x) trên tập X.

Ví dụ: Xét hệ thức $\mathrm{F}\left(\mathrm{x,y}\right)=x^2+y^2-1=0$

Với $\forall x\in\left[-1,1\right]$, ta có $y\left(x\right)=\pm\sqrt{1-x^2}$

Vậy hàm $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x\in[-1,1]$ và hàm $y(x)=-\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x\in[-1,1]$ là các hàm ẩn xác định bởi hệ thức $\mathrm{F}(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

**4.2.4.2. Định lí 6** (công thức tính đạo hàm của hàm ẩn)

Cho hàm 2 biến F(x,y) xác định trong một lân cận của điểm $(x_0,y_0)$ và $\mathrm{F}(x_0,y_0)=0$, giả thiết rằng F(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục và $\mathrm{F}'_y(x_0,y_0)\neq 0$ tại mọi điểm (x,y) thuộc lân cận của. Khi đó tồn tại duy nhất hàm liên tục y=y(x) xác định trong lân cận của $x_0$ thoả mãn điều kiện: $y=y(x_0)$, $\mathrm{F}(x,y(x))=0$ và $y'_x=-\dfrac{\mathrm{F}'_x(x,y)}{\mathrm{F}'_y(x,y)}$ (hay $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$).

Tương tự, giả sử hệ thức $\mathrm{F}(x,y,z)=0$ xác định hàm ẩn hai biến duy nhất $z=z(x,y)$ theo định lí 6 tồn tại hàm ẩn.

Thay z bởi $z(x,y)$ vào hệ thức ta được đồng nhất thức $\mathrm{F}[x,y,z(x,y)]=0$

Với $\mathrm{F}'_z\neq 0$ thì ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\mathrm{F}'_x}{\mathrm{F}'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\mathrm{F}'_y}{\mathrm{F}'_z}$$

**4.2.4.3. Ví dụ**

Tìm đạo của các hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $xe^y-ye^x-e^{xy}=0$, tính y'.

b) $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**4.3. Cực trị và GTLN - GTNN của hàm số**

**4.3.1. Cực trị của hàm hai biến**

**4.3.1.1. Định nghĩa**

Cho hàm số $Z=f(x,y)$ xác định trong $D\subseteq\mathbb{R}^2$ và $U(M_0)$ là một lân cận nào đó của $M_0(x_0,y_0)\in D$. Ta nói,

- Hàm Z đạt cực đại tại $M_0$ nếu $f(M) < f(M_0)$ với mọi $M\in U(M_0)$.
- Hàm Z đạt cực tiểu tại $M_0$ nếu $f(M) > f(M_0)$ với mọi $M\in U(M_0)$.

Cực đại và cực tiểu của hàm $Z=f(x,y)$ được gọi chung là cực trị của hàm số Z.

Tại $M_0(x_0; y_0)$ mà hàm đạt được cực trị gọi là điểm cực trị của hàm số.

**4.3.1.2. Quy tắc tìm cực trị**

♦ **Định nghĩa:**

- Điểm $M_0\left(x_0,y_0\right)$ được gọi là điểm dừng của hàm số f(x,y) nếu $f'_x\left(x_0,y_0\right)=f'_y\left(x_0,y_0\right)=0$.

- Điểm $M_0\left(x_0,y_0\right)$ được gọi là điểm kì dị của hàm số f(x,y) nếu $f'_x\left(x_0,y_0\right)$ hoặc $f'_y\left(x_0,y_0\right)$ không tồn tại.

Điểm dừng và điểm kì dị được gọi chung là điểm tới hạn.

♦ **Định lý 1:** (điều kiện cần)

Nếu hàm $Z=f\left(x,y\right)$ đạt được cực trị tại $M_0(x_0; y_0)\in D$ và tại đây hàm số có các đạo hàm riêng hữu hạn $f'_x\left(x_0,y_0\right)$, $f'_y\left(x_0,y_0\right)$ thì các đạo hàm riêng đó phải triệt tiêu, tức là $f'_x\left(x_0,y_0\right)=0$, $f'_y\left(x_0,y_0\right)=0$.

*** Chú ý:**

- Định lý 1 cho phép ta hạn chế việc xét cực trị tại điểm dừng và điểm kì dị, ta gọi các đểm này là các điểm tới hạn.

- Nếu D mở và $Z=f\left(x,y\right)$ không có điểm kì dị thì điều kiện $f'_x\left(x_0,y_0\right)=0$, $f'_y\left(x_0,y_0\right)=0$ chỉ là điều kiện cần để hàm đạt cực trị tại $\left(x_0,y_0\right)$. Tuy nhiên nó không đủ để quyết định hàm đạt cực trị tại điểm này.

Chẳng hạn hàm Z=xy có điểm dừng (0,0) nhưng hàm không đạt cực trị tại điểm này vì với những điểm (x,y) gần điểm (0,0) mà x>0, y<0 thì $f\left(x,y\right)<f\left(0,0\right)=0$ và với những điểm (x,y) gần điểm (0,0) mà x>0, y>0 thì $n\to\infty$

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để có cực trị.

♦ **Định lý 2:** (Điều kiện đủ)

Giả sử $M\left(x_0,y_0\right)$ là điểm dừng của hàm số $Z=f\left(x,y\right)$ và tại đây hàm số $Z=f\left(x,y\right)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Đặt $A=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$, $\Delta=B^2\text{-}AC$. Khi đó,

i) Nếu $\Delta<0$ thì $Z=f\left(x,y\right)$ có cực trị tại $M\left(x_0,y_0\right)$ và hàm $Z=f\left(x,y\right)$ có cực đại nếu A<0 và có cực tiểu nếu A>0.

ii) Nếu $\Delta>0$ thì $Z=f\left(x,y\right)$ không có cực trị tại $M_0(x_0; y_0)$.

iii) Nếu $\Delta=0$: chưa kết luận được cực trị của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ tại $M_0(x_0;y_0)$.

♦ **Ví dụ:** Tìm cực trị của các hàm số sau:

1) $Z=x^3+2y^3-3x-6y$

Ta có: $Z'_x=3x^2-3,\ Z'_y=6y^2-6$.

Tọa độ các điểm dừng là: $M_1(1,1), M_2(-1,1), M_3(-1,-1), M_4(1,-1)$.

$$Z''_{xx}=6x,\ Z''_{xy}=0,\ Z''_{yy}=12y$$

Tại $M_1(1,1)$, ta có $\Delta=-72<0$ và $A=6>0 \Rightarrow M_1(1,1)$ là điểm cực tiểu.

Tại $M_2(-1,1)$, ta có $\Delta=72>0 \Rightarrow M_2(-1,1)$ không là điểm cực trị.

Tại $M_3(-1,-1)$, ta có $\Delta=-72<0$ và $A=-6<0 \Rightarrow M_3(-1,-1)$ là điểm cực đại.

Tại $M_4(1,-1)$, ta có $\Delta=72>0 \Rightarrow M_4(1,-1)$ không là điểm cực trị.

2) $Z = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ Z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Tọa độ các điểm dừng là: $M_1(1; 1)$; $M_2(0; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z''_{xx} = 6x \\ Z''_{xy} = -3 \\ Z''_{yy} = 6y \end{cases}$$

Ta có:

Tại $M_1(1; 1)$, $B_1^2 - A_1C_1 = 9 - 36 = -27 < 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $M_1(1; 1)$ và giá trị cực tiểu là $Z = Z(M_1) =-1$

Tại $M_2(0; 0)$, $B_2^2-A_2C_2=9>0$

$\Rightarrow$ hàm số không có cực trị tại $M_2$

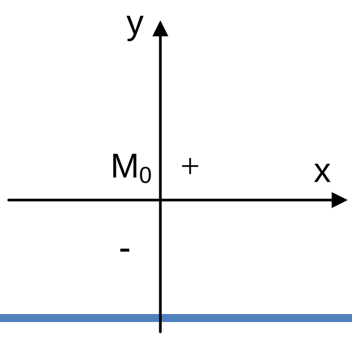
3) $Z = x^3 +y^3$

Ta có: $\begin{cases} Z'_x=3x^2 \\ Z'_y=3y^2 \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ dừng $M_0(0;0)$

$$Z''_{xx}=6x,\ Z''_{yy}=6y,\ Z''_{xy}=0$$

Tại $M_0(0,0)$, ta có $B^2$-AC nên chưa kết luận được ngay.

Chú ý rằng $Z(0,0)=0$ và $Z(x,y)-Z(0,0)= x^3 +y^3$, hiệu này dương nếu điểm $M(x,y)$ nằm ở góc phần tư thứ nhất, âm nếu M




Hình 19

nằm ở góc phần tư ba. Do đó dấu của hiệu Z(x,y)-Z(0,0) thay đổi ở lân cận điểm $M_0(0,0)$ nên $M_0(0,0)$ không là điểm cực trị.

#### 4.3.1.3. Cực trị có điều kiện

♦ **Định nghĩa**

Cực trị của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi\left(x,y\right)=0$ được gọi là cực trị có điều kiện.

♦ **Phương pháp thế:**

Giả sử từ điều kiện ràng buộc $\varphi\left(x,y\right)=0$ ta giải ra được y=y(x). Khi đó việc tìm cực trị có điều kiện của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ được quy về việc tìm cực trị tự do (không điều kiện) của hàm $Z=f\left(x,y\left(x\right)\right)$

Tức là, ta giải bài toán tìm cực trị điều kiện bằng cách sử dụng phương pháp cực trị của hàm một biến số.

**Ví dụ:** Tìm cực trị của $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ với điều kiện x+y -1=0.

**Giải**

Từ điều kiện ta giải ra y=1-x. Thế vào biểu thức của Z, ta được

$$Z=\sqrt{2}.\sqrt{x-x^2}$$

Đây là hàm một biến của x xác định trên đoạn $\left[0,1\right]$.

Ta có: $\dfrac{dZ}{dx}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\Rightarrow\dfrac{dZ}{dx}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Lập bảng biến thiên:

| x | 0 | | 1/2 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dZ}{dx}$ | ‖ | + | 0 | - | ‖ |
| Z | 0 | ↗ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ↘ | 0 |

Tại x =1/2 hàm só $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ đạt cực đại và giá trị cực đại là Z(1/2,1/2) $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

♦ **Phương pháp nhân tử của Lagrange:**

Giả sử muốn tìm cực trị của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi\left(x,y\right)=0$ mà ta gặp phải các trường hợp sau:

i) Từ phương trình $\varphi(x,y)=0$ không thể giải ra x hoặc y.

ii) Sau khi dùng phép thế thì hàm kết quả Z của một biến không thể dễ dàng lấy đạo hàm.

Để giải quyết vấn đề này người ta dựa vào phương pháp sau gọi là phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị có điều kiện.

*** Bài toán:**

Tìm cực trị của hàm số $Z=f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$.

Lập hàm Lagrange: $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda.\varphi(x,y)$

**Định lí 3:** (Điều kiện cần)

Giả sử các hàm $Z=f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục ở lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng $\varphi'_x(x_0,y_0)$, $\varphi'_y(x_0,y_0)$ không đồng thời bằng 0.

Khi đó, nếu hàm $Z=f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y)=0$ thì tồn tại một số $\lambda_0$ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

**Định lí 4:** (Điều kiện đủ)

Giả sử $Z=f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của $M_0(x_0,y_0)$ và $(x_0,y_0,\lambda_0)$ là điểm dừng của hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)$. Ta có:

- Nếu $d^2F(x_0,y_0,\lambda)=F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda)(dx)^2+2F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda)dxdy+F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda)(dy)^2$ xác định dương trong một miền theo dx, dy thỏa mãn điều kiện ràng buộc:

$$d\varphi(x_0,y_0)=\varphi'_x(x_0,y_0)dx+\varphi'_y(x_0,y_0)dy \text{ và } dx^2+dy^2\neq 0$$

thì hàm số $Z=f(x,y)$ đạt cực tiểu tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện là $\varphi(x_0,y_0)=0$.

- Nếu $d^2F(x_0,y_0,\lambda)$ xác định âm trong một miền theo dx, dy thỏa điều kiện ràng buộc như trên thì hàm số $Z=f(x,y)$ đạt cực đại tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện là $\varphi(x_0,y_0)=0$.

- Nếu $d^2F(x_0,y_0,\lambda)$ không xác định dấu trong miền nói trên thì không có cực trị có điều kiện tại $\varphi(x_0,y_0)=0$.

Từ các định lý trên ta có thể tìm cực trị có điều kiện theo phương pháp nhân tử Lagrange như sau:

**Bước 1:** Lập hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ($\lambda\in\mathbb{R}$)

**Bước 2:** Tính

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y) \\ F'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y) \end{cases}$$

Và giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng $(x_0,y_0)$ và giá trị $\lambda_0$ tương ứng.

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0 \\ \varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases} \Rightarrow M_1(x_1,y_1),\ \lambda_1;\ M_2(x_2,y_2),\ \lambda_2,...$$

**Bước 3:** Tính vi phân cấp 2 của $F(x,y,\lambda)$

$$d^2F(x,y,\lambda)=F''_{xx}(x,y,\lambda)(dx)^2+2F''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy+F''_{xy}(x,y,\lambda)(dy)^2$$

và tính ràng buộc $d\varphi(x,y)=\varphi'_x(x,y)dx+\varphi'_y(x,y)dy$

Với mỗi điểm dừng $M_1(x_1,y_1)$ và $\lambda_1$, xét $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)$:

i) Nếu $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)>0$ với $dx^2+dy^2\neq 0$ thì hàm số $Z=f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ đạt cực tiểu tại $M_1(x_1,y_1)$.

ii) Nếu $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)<0$ thì hàm số $Z=f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ đạt giá trị cực đại tại điểm $M_1(x_1,y_1)$.

iii) Nếu dấu của $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)$ không xác định xét theo $dx^2+dy^2\neq 0$ thì hàm số $Z=f(x,y)$ không đạt cực trị tại $M_1(x_1,y_1)$

Tương tự cho các điểm còn lại.

♦ **Ví dụ:**

1) Sử dụng phương pháp Lagrange để tìm cực trị của hàm số $Z=3x-y$ với điều kiện $3x^2+4y^2=208$.

**Giải**

Bước 1. Lập hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)=3x-y+\lambda.\left[3x^2+4y^2-208\right]$.

Bước 2. Ta có:

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=0 \\ F'_y(x,y,\lambda)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+6\lambda x=0 \\ -1+8\lambda y=0 \\ 3x^2+4y^2=208 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm dừng $M_1(8,-2)$ ứng với $\lambda_1 = \frac{-1}{16}$; $M_2(-8,2)$ ứng với $\lambda_2 = \frac{1}{16}$.

Bước 3. Ta có:

$F''_{xx}(x,y,\lambda)=-6\lambda;\ F''_{xy}(x,y,\lambda)=F''_{yx}(x,y,\lambda)=0; F''_{yy}(x,y,\lambda)=-8\lambda$

$\Rightarrow d^2F(x,y,\lambda) = -6\lambda(dx)^2 - 8\lambda(dy)^2$

$\varphi'_x(x,y)=6x;\ \varphi'_y(x,y)=8y \Rightarrow d\varphi(x,y)=6xdx+8ydy$

Tại $M_1(8,-2)$ ứng với $\lambda_1 = \frac{-1}{16}$, ta có: $d^2F(x,y,\lambda) = \frac{3}{8}(dx)^2 + \frac{1}{2}(dy)^2 > 0$

Suy ra $M_1(8,-2)$ là điểm cực tiểu, $Z_{CT}$=26.

Tại $M_2(-8,2)$ ứng với $\lambda_1 = \frac{1}{16}$, ta có:

$d^2F(x,y,\lambda) = -\left(\frac{3}{8}(dx)^2 + \frac{1}{2}(dy)^2\right) < 0$

Suy ra $M_2(-8,2)$ là điểm cực đại, $Z_{CĐ}$=-26.

2) Sử dụng phương pháp Lagrange để tìm cực trị của hàm số $Z=6-4x-3y$ với điều kiện $x^2+y^2=1$.

Giải

Bước 1. Lập hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)=6-4x-3y+\lambda.\left[x^2+y^2-1\right]$.

Bước 2. Ta có:

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=0 \\ F'_y(x,y,\lambda)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+2\lambda x=0 \\ -3+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm dừng $M_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_1 = \frac{5}{2}$; $M_2\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$.

Bước 3. Ta có:

$F''_{xx}(x,y,\lambda)=2\lambda;\ F''_{xy}(x,y,\lambda)=F''_{yx}(x,y,\lambda)=0; F''_{yy}(x,y,\lambda)=2\lambda$

$\Rightarrow d^2F(x,y,\lambda) = 2\lambda\left((dx)^2 + (dy)^2\right)$

$\varphi'_x(x,y)=2x;\ \varphi'_y(x,y)=2y \Rightarrow d\varphi(x,y)=2xdx+2ydy$

Tại $M_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_1=\frac{5}{2}$, ta có: $d^2F(x,y,\lambda)=5\left((dx)^2+(dy)^2\right)>0$

Suy ra $M_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ là điểm cực tiểu, $Z_{CT}=1$.

Tại $M_2\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_2=-\frac{5}{2}$, ta có:

$d^2F(x,y,\lambda)=-5\left((dx)^2+(dy)^2\right)<0$

Suy ra $M_2(-8,2)$ là điểm cực đại, $Z_{CĐ}=11$.

### 4.3.2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền đóng

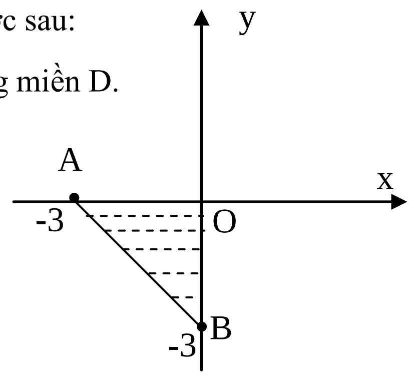
Cực trị mà chúng ta định nghĩa ở mục trước chỉ có tính chất địa phương. Chúng lớn hơn hay bé hơn những giá trị khác của hàm số ở lân cận điểm cực trị. Người ta thường gọi đó là những cực trị địa phương. Bây giờ ta muốn tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trong toàn bộ miền nào đó.

Ta biết rằng hàm số Z=f(x,y) liên tục trên miền đóng D thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền D. Nếu các giá trị ấy đạt được tại những điểm bên trong miền D thì những điểm ấy phải là điểm cực trị, do đó là điểm dừng của hàm số. Nhưng các giá trị ấy cũng có thể đạt được trên biên của miền D. Do đó muốn tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số Z=f(x,y) trong miền đóng D, ta thực hiện các bước sau:

i) Tính giá trị của $Z=f(x,y)$ tại các điểm dừng nằm trong miền D.

ii) Tính giá trị của Z tại các điểm trên biên của miền D.

iii) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các giá trị tính ở i) và ii) là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất phải tìm.



Hình 20

♦ **Ví dụ**:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$Z=x^2+y^2-xy+x+y$$

Trên miền D giới hạn bởi $x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3$

**Giải**

▪ Tìm các điểm dừng của hàm số $Z=x^2+y^2-xy+x+y$ trong miền D.

Ta có:

$$\begin{cases} Z'_x=2x-y+1 \\ Z'_y=2y-x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z'_x=0 \\ Z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\text{-}y+1=0 \\ 2y\text{-}x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_0(-1,-1) \in D$ và $Z(M_0) = -1$.

▪ Biên của D gồm 3 đoạn thẳng OA, OB, AB.

Trên OA, ta có -3<x<0, y=0, $Z = x^2 + x$

$Z'_x=2x+1, Z'_x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow M_1(-1/2,0)$, $Z\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$.

Tương tự, trên OB ta có $M_2\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ và $Z\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$.

Trên AB, ta có $M_3\left(-\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right)$ và $Z\left(\frac{-3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$.

Tại các điểm O, A, B, ta có: $Z(0,0)=0$; $Z(-3,0)=6$; $Z(0,-3)=6$.

So sánh các giá trị của Z, suy ra maxZ=6 tại $(-3,0)$ và $(0,-3)$; minZ=-1 tại $M_0(-1,-1)$.

## BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 4

-----

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z = \ln x + \ln \sin y$

b) $z=\sqrt{y-x}\ln(y+x)$

c) $z=\dfrac{x}{\cos^2 y}$

2. Cho hàm số $z=f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$. Tính $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$, $f(-x,-y)$.

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{xy}{x^4+y^4}$

4. Tìm giới hạn khi $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$ ;

c) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

5. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn tại $M_0(x_0,y_0)$

$$f(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{x^3+y^3}.$$

6. Khảo xác tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq\left(0,0\right) \\ 0 & \text{khi } (x,y)=\left(0,0\right) \end{cases}$.

6. Tính đạo hàm riêng theo định nghĩa của các hàm số sau:

a) $Z=f\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy}$ tại (0,0).

b) $Z=f\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ tại (0,0).

7. Tính đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

b) $f\left(x,y\right)=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$

c) $f\left(x,y\right)=\arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

d) $f\left(x,y\right)=\ln\left(xy^2+yx^2+\sqrt{1+\left(xy^2+yx^2\right)^2}\right)$

e) $f\left(x,y\right)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

f) $f\left(x,y\right)=e^{xy}\cos x\sin y$

g) $f\left(x,y,z\right)=e^{xyz}\sin\dfrac{y}{z}$

h) $f\left(x,y,z\right)=x^{y^z}\ \left(x>0,y>0\right)$

i) $f\left(x,y,z\right)=e^{\frac{1}{x+y+z}}$

j) $f\left(x,y,z\right)=z\sin\dfrac{y}{x+z}$

8. Tính đạo hàm hợp của các hàm số sau:

a) $Z=e^{u^2-2v^2}$ với $u=\cos x$, $v=\sqrt{x^2+y^2}$ .

b) $Z=\ln\left(u^2+v^2\right)$ với $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

c) $Z=xe^{\frac{x}{y}}$ với $x=\cos t$, $y=e^{2t}$ .

d) $Z=x\sqrt{1+y^2}$ với $x=te^{2t}$, $y=e^{-t}$ .

9. Tính $\dfrac{dZ}{dx}$ của các hàm số sau:

a) $Z=u^3+v^3$ với $u=x^2$, $v=1-e^x$ .

b) $Z=u\sqrt{1+v^2}$ với $u=xe^x$, $v=\cos x$ .

c) $Z=\ln\left(u+v^2\right)$ với $u=\sqrt{1+x}$, $v=1+\sqrt{x}$ .

9. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a) $Z=e^{x}(\cos y+x\sin y)$ b) $Z=\ln\tan\frac{y}{x}$

c) $Z=\sin(x^2+y^2)$ d) $u=xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}$.

10. Dùng vi phân tính gần đúng các biểu thức sau:

a) $\left(\sqrt{99}-\sqrt[3]{124}\right)^3$ b) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$

c) $\dfrac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98}.\sqrt[4]{1,05}}$.

11. Tính đạo hàm của các hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $3\sin\frac{\sqrt{x}}{y}-2\cos\frac{\sqrt{x}}{y}+1=0$, tính $y'$

b) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$

c) $x^3+y^3+z^3=3xyz$, tính $z'_x$, $z'_y$

d) $xy^2z^3+x^3y^2z=x+y+z$, tính $z'_x$, $z'_y$

e) $y^2ze^{x+y}-\sin xyz=0$, tính $z'_x$, $z'_y$.

12. Tìm đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=x^2y+x\sqrt{y}$ b) $f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)$

c) $f(x,y)=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$ d) $f(x,y)=x\ln(x+y)$

e) $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ f) $f(x,y)=x^{\ln y}$

13. Tìm vi phân cấp hai của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\ln(x-y)$ b) $f(x,y)=x^{y}$

c) $f(x,y)=(x+y)e^{x+y}$ d) $f(x,y)=\dfrac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$.

14. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=x^2+y^2+xy-3x-6y$ b) $f(x,y)=x^3+3xy^2-30x-18y$

c) $f(x,y)=x^2+y^2+xy-2x-y$ d) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$

e) $f(x,y)=x+y-xe^{y}$ f) $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

g) $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$ h) $f(x,y)=x^2(x+1)+y^3$

15. Tìm cực trị của các hàm số

a) $f\left(x,y\right)=\sqrt{1\text{-}x^2\text{-}y^2}$ với điều kiện x+y-1=0.

c) $f\left(x,y\right)=6\text{-}4x\text{-}3y$ với điều kiện $x^2+y^2=1$.

d) $f\left(x,y\right)=2x^2+12xy+y^2$ với điều kiện $x^2+4y^2=25$.

e) $f\left(x,y\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

16. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=x^2\text{-}y^2$ trong miền D xác định bởi $x^2+y^2\le 4$

b) $f\left(x,y\right)=x^2y\left(4\text{-}x\text{-}y\right)$ trong miền đóng D giới hạn bởi các đường thẳng x=0, y=0, x+y=6.

c) $f\left(x,y\right)=2x^2+2y^2\text{-}\left(x\text{-}1\right)^2+\left(y-1\right)^2$ trong miền tam giác OAB với A(1,0), B(0,1).

d) $f\left(x,y\right)=xy$ trong hình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**Chương 5**

**PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**

**-------**

> ❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:
> - Hiểu các khái niệm cơ bản về phương trình vi phân.
> - Giải được phương trình vi phân cấp một, cấp hai cơ bản.

## 5.1. Tổng quan về phương trình vi phân

### 5.1.1. Khái niệm

Trong toán học phương trình vi phân là một chuyên ngành phát triển có tầm quan trọng và có nhiều ứng dụng thực tế trong các lĩnh vực khoa học kỹ thuật, kinh tế. Để làm quen với khái niệm phương trình vi phân ta xem một số bài toán dẫn tới việc thiết lập phương trình vi phân dưới đây.

### 5.1.2. Một số bài toán dẫn tới phương trình vi phân

#### 5.1.2.1. Bài toán 1

Cho một vật khối lượng m rơi tự do trong không khí. Giả sử sức cản không khí tỉ lệ với vận tốc rơi là v(t) vào thời thời điểm t với hệ số tỉ lệ là k>0. Tìm v(t).

Khi vật rơi thì lực tác dụng lên vật gồm có: lực hút của trái đất là mg và lực cản của không khí là kv(t). Do đó theo định luật Newton ta có $ma=F$ với a là gia tốc của vật rơi. Nghĩa là ta có phương trình:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv \text{ hay } mv'=mg-kv$$

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm v(t).

#### 5.1.2.2. Bài toán 2

Cho một thanh kim loại được nung nóng đến nhiệt độ $300^0$C, và được đặt trong 1 môi trường đủ rộng với nhiệt độ không đổi là $30^0$C (và nhiệt độ tỏa ra từ thanh kim loại không làm thay đổi nhiệt độ môi trường). Tìm T(t) là nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm t.

Theo quy luật Newton tốc độ giảm nhiệt của thanh kim loại $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ tỉ lệ với hiệu nhiệt độ của vật thể T(t) và nhiệt độ môi trường $30^0$C. Do đó ta có $T'(t)=k\left(T(t)-30^0\right)$

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm T(t) trong đó k>0 là hệ số tỉ lệ và T(0) = 300 là điều kiện ban đầu của bài toán.

#### 5.1.2.3. Bài toán 3

Tìm phương trình $y=f(x)$ của một đường cong rằng tiếp tuyến tại mỗi điểm sẽ cắt trục tung tại điểm khác có tung độ bằng hai lần tung độ tiếp điểm. Biết rằng phương trình tiếp tuyến với đường cong $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0)$ có dạng $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Giao điểm của tiếp tuyến với trục tung có tung độ là $y_1=f'(x_0)(x_0)+y_0$

Theo giả thiết ta có $y_1=2y_0$, từ đó ta có phương trình $y_0=f'(x_0)(x_0)$.

Với điểm $M_0(x_0)$ là điểm bất kì nên ta có phương trình vi phân.

### 5.1.3. Các khái niệm chung về phương trình vi phân

#### 5.1.3.1. Định nghĩa

Một phương trìnhmà ẩn cần tìm là hàm số và hàm số phải tìm có mặt trong phương trình đó dưới dạng đạo hàm hoặc vi phân các cấp được gọi là phương trình vi phân.

Nếu hàm số phải tìm là hàm của một biến số độc lập thì phương trình vi phân tương ứng còn được gọi là phương trình vi phân thường. Nếu hàm số phải tìm là hàm của nhiều biến số độc lập thì phương trình vi phân còn được gọi là phương trình đạo hàm riêng.

#### 5.1.3.2. Cấp của một phương trình vi phân

Cấp của một phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân của hàm phải tìm có mặt trong phương trình vi phân đó.

Phương trình vi phân thường cấp n có dạng tổng quát như sau:

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0 \quad (1)$$

trong đó F là một hàm số của n+2 biến số $x,y,y',...,y^{(n)}$.

#### 5.1.3.3. Nghiệm của phương trình vi phân

Nghiệm của phương trình vi phân (1) là hàm số $\varphi(x)$ xác định trong khoảng (a,b), mà khi thay $y=\varphi(x)$, $y'=\varphi'(x),...,y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x)$ vào (1) ta được một đồng nhất thức:

$$F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n)}(x)\right)=0$$

Giải một phương trình vi phân có nghĩa là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó. Về mặt hình học mỗi nghiệm của phương trình vi phân xác định một đường gọi là đường tích phân của phương trình. Giải một phương trình là tìm tất cả các đường tích phân của nó, các đường ấy được xác định hoặc bởi phương trình $y=\varphi(x)$ hoặc bởi phương trình $\varphi(x,y)=0$, hoặc bởi phương trình tham số x=x(t), y=y(t).

♦ **Ví dụ:** Phương trình $\frac{dy}{dx}=2y$ là phương trình vi phân thường cấp 1, có nghiệm là hàm $y=ce^{2x}$ (c là hằng số); phương trình $y''-2y=e^x$ là phương trình vi phân thường cấp 2, phương trình $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp 2.

### 5.2. Phương trình vi phân cấp 1

#### 5.2.1. Tổng quát về phương trình vi phân cấp 1

##### 5.2.1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân thường cấp 1 là phương trình được biểu diễn một trong các dạng sau:

♦ Dạng tổng quát: $F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$ (2)

trong đó: x là biến số độc lập; y là hàm phải tìm; y’ là đạo hàm cấp một của y.

♦ Dạng đã giải theo đạo hàm: $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (3)

♦ Dạng đối xứng $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (4)

ở dạng (2) và (3) thay cho kí hiệu $\frac{dy}{dx}$ ta có thể dùng kí hiệu $y'$.

♦ **Ví dụ**: Phương trình $y'+xy=x\sin x$, $yy'+x^2+y^2=0$ là những phương trình vi phân cấp 1.

##### 5.2.1.2 Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình vi phân cấp một y’=f(x,y) (5). Giả sử hàm f(x,y) liên tục trong miền nào đó chứa $(x_0,y_0)$ thì phương trình vi phân cấp 1 đã cho sẽ tồn tại một nghiệm y=y(x); nghiệm này nhận giá trị $y_0=y(x_0)$.

Nếu ngoài ra $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ cũng liên tục trong miền nói trên thì y=y(x) là nghiệm duy nhất của phương trình vi phân cấp một đã cho.

Điều kiện để hàm y=y(x) nhận giá trị $y_0$ tại $x=x_0$ được gọi là sự kiện hay điều kiện đầu của phương trình vi phân cấp một và thường được ký hiệu: $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (5) thoả mãn điều kiện ban đầu đó được gọi là bài toán Cauchy của phương trình (5).

Về mặt hình học định lí trên khẳng định rằng với các điều kiện đã nêu, trong lân cận nào đó của điểm $(x_0,y_0)$ tồn tại một đường cong tích phân duy nhất của phương trình (5) đi qua điểm ấy.

**5.2.1.3. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng**

Việc tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp một dẫn đến việc lấy tich phân bất định, do đó trong biểu thức nghiệm của phương trình vi phân cấp một có mặt hằng số C bất kì y=φ(x,C).

Họ hàm số y=φ(x,C) được gọi là nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân thường cấp 1, nếu gán cho C một số bất kỳ thuộc tập số thực nào đó ta được một nghiệm của phương trình đó. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho C một giá trị bằng số nhất định được gọi là nghiệm riêng của phương trình.

♦ **Ví dụ**: Phương trình vi phân $y'=\cos x$ có nghiệm tổng quát là y=sinx+C, nghiệm y=sinx ứng với C=0 là một nghiệm riêng.

Nhiều khi giải một phương trình vi phân cấp một ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không phải dưới dạng tường minh mà dưới dạng ẩn:

$$\phi(x,y,C)=0$$

trong đó C là hằng số tùy ý, hệ thức trên là liên hệ giữa biến độc lập x và nghiệm tổng quát phương trình vi phân cấp một gọi là tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp một. Mỗi tích phân ứng với một giá trị xác định của C được gọi là một tích phân riêng của phương trình vi phân cấp một.

♦ **Ví dụ**: Xét phương trình $\frac{x}{2}dx+\frac{2y}{9}dy=0$ .

Lấy tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=C$.

Với C=1 ta có tích phân riêng có đường biểu diễn là hình Ellip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Về phương diện hình học thì tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp một xác định cho ta một họ các đường cong trong mặt phẳng, họ này phụ thuộc vào một hằng số tuỳ ý C và mỗi một đường cong trong họ được gọi là một đường cong tích phân.

### 5.2.2. Phương trình vi phân có biến phân ly (tách biến)

#### 5.2.2.1. Định nghĩa

Phương trình biến phân ly là phương trình có dạng:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (6)$$

trong đó M(x), N(y) là những hàm phụ thuộc x, y (x là biến độc lập; y là hàm cần tìm)

#### 5.2.2.2. Phương pháp giải

Lấy tích phân hai vế phương trình (6) ta được tích phân tổng quát:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

***Nhận xét**:

Xét phương trình vi phân cấp một $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$

Nếu $M_2(y), N_1(x) \neq 0$ thì chia hai vế cho $M_2(y).N_1(x)$

$\Leftrightarrow \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$ và do đó tích phân tổng quát của (6)

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$$

Nếu $M_2(y)=0$ thì ta thấy $x=x_0$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $N_1(x)=0$ thì $y=y_0$ là nghiệm của phương trình.

#### 5.2.2.3. Ví dụ

1. Giải phương trình:

a) $\frac{x}{x^2+1}dx+(y+1)dy=0$.

b) $(e^2+x+1)dx+(\sin y+2\cos y)dy$.

2. Giải phương trình: $x^2(y + 1)dx + (x^3 – 1)(y – 1)dy = 0$ (1)

Giải

Nếu $\begin{cases} x^3-1\neq 0 \\ y+1\neq 0 \end{cases}$ thì tích phân tổng quát của phương trình

$$(\frac{x^2}{x^3-1})dx+(\frac{y-1}{y+1})dy=0 \Leftrightarrow \int(\frac{x^2}{x^3-1})dx+\int(\frac{y-1}{y+1})dy=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-1)}{x^3-1}+\int\frac{2d(y+1)}{y+1}+y=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln|x^3-1|+2\ln|y+1|+y=C$$

Ta thấy x=1, y=-1 là nghiệm của phương trình.

**5.2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp (phương trình thuần nhất)**

**5.2.3.1. Định nghĩa**

Hàm f(x,y) được gọi là hàm đẳng cấp k đối với x, y nếu $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y)$, $\lambda \neq 0$. Nếu k=0 thì $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$. Ta nói rằng f(x,y) là hàm đẳng cấp cấp 0 hay là đẳng cấp đối với x, y. Nếu f(x,y) là hàm đẳng cấp k đối với x, y thì nó luôn luôn được biểu diễn với dạng: $f(x,y)=\lambda^k\varphi(\frac{y}{x})$.

♦ **Ví dụ**: 1. $f(x,y)=\frac{x-y}{2x-3y}$

2. $f(x,y)=\frac{x^2-xy}{x^2+3y^2}$.

**5.2.3.2. Định nghĩa**

Phương trình vi phân $y'=f(x,y)$ được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp nếu hàm f(x,y) là một hàm đẳng cấp đối với x,y nghĩa là f(x,y)=φ( $\frac{y}{x}$ ).

**5.2.3.3. Phương pháp giải**

Vì f(x,y) là hàm đẳng cấp nên f(x,y)=φ( $\frac{y}{x}$ ). Khi đó phương trình $y' = f(x,y) \Leftrightarrow y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Đặt $u = \frac{y}{x}$ hay $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$.

♦ Nếu φ(u)–u≠0 (với mọi u) thì $x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$ do đó lấy tích phân hai vế $\ln|x| + \ln|C| = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}$.

Đặt $\phi(u) = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}$ thì $\frac{|x|}{C} = e^{\phi(u)} \Leftrightarrow |x| = Ce^{\phi(u)} \Leftrightarrow x = \pm Ce^{\phi(u)}$.

♦ Nếu φ(u)–u=0⇔φ(u)=u với mọi u thì $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$ hay $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ $\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|Cx|$ hay y=Cx.

♦ Nếu φ(u)–u=0 tại một số hữu hạn giá trị $u=u_0$, $u=u_{1=}$,..., $u=u_n$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy $y=u_0x$, $y=u_1x$, …, $y=u_nx$ là nghiệm của phương trình.

**5.2.3.4. Ví dụ**

1. Giải phương trình $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$.

2. Giải phương trình $y' = \frac{x - y}{x + y}$ với điều kiện ban đầu y(1)=0.

**5.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (phương trình vi phân không thuần nhất)**

**5.2.4.1. Định nghĩa**

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng:

$$y'+p(x)y=q(x) \quad (1)$$

trong đó q(x) ≠ 0.

**5.2.4.2. Phương pháp giải (phương pháp biến thiên hằng số Lagrange)**

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1) thì trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y'+p(x)y=0$ (2)

- Nếu y≠0 thì ta có nghiệm tổng quát của (2) là $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ (3).
- Nếu y=0 thì nó cũng là nghiệm và là nghiệm riêng của phương trình (1) ứng với C=0.

Ta sẽ tìm nghiệm tổng quát của (1) dưới dạng (3) ta sẽ coi C là hằng số của biến x: C=C(x) để (3) là nghiệm của (1).

Từ (3) ta có: $\frac{dy}{dx} = C'e^{-\int p(x)dx}$ + C[-p(x)] $e^{-\int p(x)dx}$ thay vào (1), ta được

$C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+D$ với D là hằng số bất kì. (4)

Vậy nghiệm tổng quát của (1) sẽ là:

$y = [\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+D]\,e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow y=D\,e^{-\int p(x)dx}+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\,.\,e^{-\int p(x)dx}$ (5).

**5.2.4.3. Ví dụ**

1. Giải phương trình: $y'+\cos xy=e^{-\sin x}$.

2. Giải phương trình: $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$.

**5.2.5. Phương trình Bernulli**

**5.2.5.1. Định nghĩa**

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng:

$$y'+p(x)y=q(x).y^{\alpha} \quad (1)$$

trong đó p(x), q(x) là những hàm số liên tục của x, α là một số thực bất kỳ α≠{0,1}.

**5.2.5.2. Phương pháp giải**

Với giả thiết y≠0 chia cả hai vế (1) cho $y^{\alpha}$, ta được:

$$y'.y^{-\alpha}+y^{1-\alpha}.p(x)=q(x) \ (2)$$

Đặt $z=y^{1-\alpha} \Rightarrow z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ thế vào phương trình (2), ta được:

$$z'+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x) \ (3)$$

phương trình (3) là phương trình tuyến tính cấp một không thuần nhất đối với z=z(x) là hàm số phải tìm.

Giải phương trình (3) ta sẽ nhận được nghiệm z=z(x) và sau đó thay z vào $z=y^{1-\alpha}$ thì ta được nghiệm tổng quát của phương trình Bernoulli.

**5.2.5.3. Ví dụ**

1. Giải phương trình: $y'+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{y^3}{x^2}(x\neq 0)$.

2. Giải phương trình: $y'+\dfrac{y}{x}=xy^2$.

3. Giải phương trình: $y'+2xy=2x^3y^3$.

**5.2.6. Phương trình vi phân toàn phần**

**5.2.6.1. Định nghĩa**

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ (1)$$

trong đó, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$ với $\Phi$ là một hàm nào đó.

**5.2.6.2. Cách giải**

Để nhận biết phương trình (1) có phải là phương trình vi phân toàn phần hay không và tìm cách giải nó ta xét định lý sau:

♦ **Định lý.** Giả sử các hàm P(x,y); Q(x,y) là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng ở trong miền D thì điều kiện cần và đủ cho P(x,y)dx+Q(x,y)dy là vi phân toàn phần của hàm (x,y) nào đó trong D khi và chỉ khi thỏa mãn $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (2) với mọi $(x,y)\in D$.

Khi điều kiện (2) được thỏa mãn, hàm số $\Phi(x,y)$ có vi phân toàn phần là P(x,y)dx+Q(x,y)dy có thể tìm được theo công thức:

$$\Phi(x,y)=\int_{x_o}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_o}^{y} Q(x_o,y)dy$$

Hoặc

$$\Phi(x,y)=\int_{x_o}^{x} P(x,y_o)dx+\int_{y_o}^{y} Q(x,y)dy$$

Trong đó $x_o$ và $y_o$ được chọn tùy ý sao cho điểm $(x_o,y_o)\in D$.

***Chú ý:** Theo định lý trên điểm $(x_o,y_o)$ có thể chọn tùy ý, miễn là thuộc miền D, nhưng ta nên chọn điểm $(x_o,y_o)$ sao cho tích phân trong công thức tính toán đơn giản nhất.

**5.2.6.3. Ví dụ**

Giải các phương trình :

a) $(3x^2+xy^2)dx+(6x^2y+3y^3)dy=0$

b) $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy=0$

c) $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$.

**5.3. Phương trình vi phân cấp 2**

**5.3.1. Các khái niệm cơ bản**

**5.3.1.1. Định nghĩa**

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng:

$$F(x,y,y',y'')=0 \text{ hay } y''=f(x,y,y') \quad (1)$$

**5.3.1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm**

Xét phương trình $y''=f(x,y,y')$. Nếu $f(x,y,y')$ có đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong lân cận của điểm $\left(x_0, y_0, y_0'\right)$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ xác định và liên tục trên khoảng đủ nhỏ $\left(x_o - \delta, x_o + \delta\right)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y_o'$.

**5.3.1.3. Định nghĩa**

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là hàm $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$ thỏa (1) với mọi hằng số $C_1, C_2$.

Hàm $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0\right)$ thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ được gọi là nghiệm riêng.

Nếu nghiệm tổng quát tìm được dưới dạng ẩn $\phi\left(x, C_1, C_2\right) = 0$ (2) thì (2) được

**5.3.2. Các phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được**

Cho phương trình $y'' = f\left(x, y, y'\right)$ (1)

Ta xét các trường hợp đặc biệt có thể đưa phương trình (1) về dạng phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đặt ẩn phụ.

**5.3.2.1. Loại 1**

Phương trình (1) có dạng: $y'' = f(x)$.

Vì $(y')' = y'' = f(x)$ nên $y' = \int f(x)dx + C_1$.

Tích phân lần nữa ta được :

$$y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$$

Với $C_1, C_2$ là hằng số.

♦ **Ví dụ**: Cho phương trình $y'' = \sin x$ (1).

Tìm nghiệm tổng quát và một nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

**Giải**

Ta có $y'' = \sin x \Rightarrow y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1$

$\Rightarrow y = \int(-\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1x + C_2$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là $y = -\sin x + C_1x + C_2$.

Vì $y(0) = 0 \Rightarrow -\sin 0 + C_1 0 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$.

Vì $y'(0) = 1 \Rightarrow -\cos 0 + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 2$

Vậy nghiệm riêng thỏa điều kiện y=-sinx+2x.

**5.3.2.2 Loại 2**

Phương trình (1) có dạng: $y'' = f(x, y')$.

Đặt $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$.

Khi đó phương trình (1) có dạng $p'(x) = f(x, p)$

Đây là phương trình vi phân cấp 1 với p(x) là nghiệm. Giải ra ta được nghiệm tổng quát của nó là $p(x) = \varphi(x, C_1)$.

Vì $y' = p(x)$ nên $y' = \varphi(x, C_1)$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

♦ **Ví dụ**: Giải phương trình $y'' = x - \frac{y'}{x}$ (1)

Giải

Đặt $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$. Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$p'(x) = x - \frac{p(x)}{x} \text{ hay } p'(x) + \frac{p(x)}{x} = x \text{ (2).}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với x biến độc lập và p(x) là hàm phải tìm.

Ta có nghiệm tổng quát của (2) là $p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$.

Vì $y' = p(x)$ nên $y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=\int\frac{x^2}{3}dx+C_1\int\frac{dx}{x}+C_2=\frac{x^3}{9}+C_1\ln|x|+C_2.$$

**5.3.2.3 Loại 3**

Phương trình (1) có dạng: $y''=f\left(y',y''\right)$ (1).

Đặt $y'=p$ và xem p là hàm của y.

Ta có $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng

$$p\frac{dp}{dy}=f\left(y,p\right) \text{ hay } \frac{dp}{dy}=\frac{1}{p}f\left(y,p\right).$$

Xem phương trình trên là phương trình vi phân cấp 1 với y là biến độc lập và p là hàm phải tìm. Giải ra ta được nghiệm tổng quát của nó là:

$$p=\varphi\left(y,C_1\right)$$

Vì $p=y'=\frac{dy}{dx}$ nên $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(y,C_1\right)$ hay $\frac{dy}{\varphi\left(y,C_1\right)}-dx=0$.

Đây là phương trình có biến phân ly. Tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát $\int\frac{dy}{\varphi\left(y,C_1\right)}-x=C_2$

♦ **Ví dụ**: Giải phương trình $2yy''+y'^2=0$ (1)

Đặt $p=y'$ thì $y''=p\frac{dp}{dy}$. Khi đó

$$\left(1\right)\Leftrightarrow 2yp\frac{dp}{dy}+p^2=0\Rightarrow p\left(2y\frac{dp}{dy}+p\right)=0.$$

$*\ p=0\Rightarrow y'=0\Rightarrow y=C$.

$*\ 2y\frac{dp}{dy}+p=0\Leftrightarrow\frac{dp}{p}+\frac{1}{2}\frac{dy}{y}=0$.

Phương trình có dạng phân li, tích phân hai vế ta được

$\ln|p|+\frac{1}{2}\ln|y|=\ln|C_0|$ hay $\ln\left|p\sqrt{|y|}\right|=\ln|C_0| \Leftrightarrow p\sqrt{|y|}=C_0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{C_0}{\sqrt{|y|}}$ hay $\sqrt{|y|}dy=C_0dx \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}}=C_1x+C_2$.

### 5.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

#### 5.3.3.1 Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình có dạng

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)\,(1)$$

trong đó $a_1$, $a_2$ là những hàm số của biến x.

♦ Nếu $f(x)\equiv 0$ thì (1) được gọi là phương trình thuần nhất.

♦ Nếu $f(x)\neq 0$ thì (1) được gọi là phương trình không thuần nhất. Và đặc biệt khi $a_1$, $a_2$ là những hằng số thì (1) còn được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số là hằng số.

#### 5.3.3.2. Phương trình thuần nhất

Xét phương trình $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ (2).

♦ **Định lý 1.** Nếu $y_1=y_1(x)$; $y_2=y_2(x)$ là hai nghiệm riêng của (2) thì $y=C_1y_1+C_2y_2$ trong đó $C_1$, $C_2$ là những hằng số tùy ý, cũng là nghiệm của (2).

♦ **Định nghĩa**. Hai hàm $y_1$ và $y_2$ được gọi là độc lập tuyến tính trên $[a,b]$ nếu tỉ số của chúng trên đoạn đó không phải là một hằng số, nghĩa là $\frac{y_1}{y_2}\neq \text{const}$.

Trường hợp ngược lại hai hàm được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Nếu hai hàm $y_1(x), y_2(x)$ là các hàm khả vi trong khoảng $(a,b)$ thì định thức $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ được gọi là định thức Wrônski của hai hàm.

♦ **Định lý 2.** Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (2) thì tồn tại một hằng số C sao cho $W(x) = W(y_1, y_2) = Ce^{-\int a_1(x)dx}$.

♦ **Định lý 3.** Các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình (2) với $y_1(x)$ hoặc $y_2(x)$ không triệt tiêu trên $(a,b)$ là độc lập tuyến tính trong khoảng $(a,b)$ khi và chỉ khi định thức Wrônski của chúng không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào trong khoảng $(a,b)$.

♦ **Định lý 4.** Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (2) thì hàm $y=C_1y_1+C_2y_2$ trong đó $C_1$, $C_2$ là những hằng số tùy ý là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

♦ **Nhận xét.** Từ định lý 4, ta thấy rằng muốn tìm nghiệm tổng quát của (2) ta cần phải biết hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Không có phương pháp tổng quát nào để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2). Sau đây ta đi đến một định lý cho phép ta tìm một nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với một nghiệm riêng đã biết trước.

♦ **Định lý 5.** Nếu biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình tuyến tính thuần nhất (2) thì ta có thể tìm một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình (2) độclập tuyến tính với $y_1(x)$ bởi $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx$.

♦ **Ví dụ**: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

**Giải**

Bằng cách thử trực tiếp, ta thấy phương trình có nghiệm riêng $y_1 = x$. Ta tìm nghiệm riêng $y_2$ độc lập tuyến tính với $y_1$.

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx$$

$$= x\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right)dx = x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1x + C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right).$$

#### 5.3.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

Xét phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (1)

trong đó $a_1$, $a_2$ là những hàm số của biến x và $f(x) \neq 0$.

♦ **Định lý 6.** Nghiệm tổng quát của phương trình (1) bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2) cộng với một nghiệm riêng Y nào đó của phương trình (1).

***Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange**

Xét phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (1)

Giả sử $y=C_1y_1+C_2y_2$ (3) là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng (3) với $C_1$ và $C_2$ là các hàm số của x.

Đạo hàm hai vế (3) ta được $y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2$

Ta chọn $C_1, C_2$ sao cho $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$.

Khi đó có thể viết lại $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$.

Đạo hàm hai vế lần nữa, ta được $y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$.

Thay $y, y', y''$ vào (1), ta được

$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$.

Vì $y_1, y_2$ là các nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (2) nên các biểu thức trong dấy ngoặc đều bằng 0. Do đó đẳng thức trên có dạng

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Như vậy hàm số y sẽ là nghiệm riêng của phương trình (1) nếu như $C_1, C_2$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Vì $y_1, y_2$ độc lập tuyến tính nên

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

Do đó hệ trên có nghiệm duy nhất

$$C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$$

Lấy tích phân hai vế của các đẳng thức trên ta nhận được

$$C_1 = \int \varphi_1(x)dx + D_1, C_2 = \int \varphi_2(x)dx + D_2$$

Do nghiệm cần tìm là nghiệm riêng nên ta có thể chọn $D_1 = D_2 = 0$. Tha vào (3) ta được nghiệm riêng của phương trình (1) là

$$Y = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx$$

♦ **Định lý 7**. (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

Cho phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x) \ (4)$$

Nếu $Y_1$ là một nghiệm của phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$ và $Y_2$ là một nghiệm của phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$ thì hàm $Y=Y_1+Y_2$ là nghiệm của phương trình (4)

♦ **Ví dụ:**

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = x$.

Giải

* Trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Ta có $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$ hay $d(\ln|y'|) = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y'| = \ln|x| + \ln|C|$ hay $y' = Cx$.

Do đó $y = C_1x^2 + C_2$.

* Tìm nghiệm riêng của phương trình dạng

$$Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1x^2 + C_2.1$$

Với $C_1, C_2$ thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} C_1'x^2 + C_2'.1 = 0 \\ C_1'2x + C_2'.0 = x \end{cases}$$

Giải hệ ta được $C_1' = 1/2, C_2' = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{x}{2} + D_1, C_2 = -\frac{x^3}{2} + D_2$

Chọn $D_1 = D_2 = 0$ thì $Y = \frac{x}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$Y = C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

### 5.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng

#### 5.3.4.1. Phương trình thuần nhất

♦ **Định nghĩa.** Xét phương trình tuyến tính thuần nhất

$$y'' + py' + qy = 0$$

trong đó p,q là hằng số.

♦ **Phương pháp giải**

Xét phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$.

+ Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt $k = k_1, k = k_2$ thì phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ (với $C_1$, $C_2$ là các hằng số).

+ Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép $k = k_0$ thì phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = (C_1 + C_2x)e^{k_0x}$.

+ Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$ thì phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

♦**Ví dụ:** Giải các phương trình sau

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$

b) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

#### 5.3.4.2. Phương trình không thuần nhất

♦ **Định nghĩa.** Phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất phương trình có dạng

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

trong đó p, q là hằng số.

♦ **Phương pháp giải:**

Theo định lý 6 Mục 4.3.3.3, sau khi biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, ta có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1) thông qua việc tìm một nghiệm riêng của nó bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Tuy nhiên đối với một số dạng đặc biệt của vế phải f(x), có thể tìm một nghiệm riêng của (1) mà không cần phải dùng cách trên.

Ta tìm nghiệm riêng của (1) trong hai trường hợp dưới đây:

***Trường hợp 1:** $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$ với $P_n(x)$ là một đa thức bậc n và $\alpha$ là hằng số.

So sánh $\alpha$ với các nghiệm $k_1, k_2$ của phương trình đặc trưng. Ta có các trường hợp sau:

+ Nếu $\alpha$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng của (1) có dạng: $Y = e^{\alpha x}.Q_n(x)$.

Trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc với đa thức $P_n(x)$ có n+1 hệ số mà ta cần phải xác định bằng phương pháp hệ số bất định sau:

Lấy đạo hàm hai vế của $Y = e^{\alpha x}.Q_n(x)$, ta được $Y' = \alpha e^{\alpha x}.Q_n(x) + e^{\alpha x}.Q_n'(x)$

$Y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}.Q_n(x) + 2\alpha e^{\alpha x}.Q_n'(x) + e^{\alpha x}.Q_n''(x)$.

Thế $Y, Y', Y''$ vào (1) rồi rút gọn ta được:

$$e^{\alpha x}\left[Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)\right] = e^{\alpha x}P_n(x)$$

hay $Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x)$ (*)

Vì $\alpha$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $\alpha^2+p\alpha+q \neq 0$. Do đó vế trái của biểu thức (*) là một đa thức bậc n, cùng bậc với vế phải. Đồng nhất các hệ số của lũy thừa cùng bậc ở hai vế của (*) ta được n+1 phương trình bậc nhất với n+1 ẩn là các hệ số của đa thức $Q_n(x)$. Giải hệ gồm n+1 ta tìm được các hệ số của đa thức $Q_n(x)$.

+ Nếu $\alpha$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng:

Ta có $\alpha^2+p\alpha+q=0$. Khi đó vế trái của (*) là đa thức bậc n-1. Muốn hàm dạng $Y=e^{\alpha x}.Q_n(x)$ nghiệm đúng phương trình (1) thì ta phải nâng bậc của đa thức $Q_n(x)$ lên một đơn vị. Ta tìm nghiệm riêng của (1) có dạng $Y=xe^{\alpha x}.Q_n(x)$.

+ Nếu $\alpha$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng:

Ta có $\alpha^2+p\alpha+q=0$ và $2\alpha+p=0$. Khi đó vế trái của (*) là đa thức bậc n-2. Ta tìm nghiệm riêng của (1) có dạng $Y=x^2e^{\alpha x}.Q_n(x)$.

♦ **Ví dụ:** Giả các phương trình sau:

a) $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$

b) $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

c) $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

***Trường hợp 2**: $f(x)=e^{\alpha x}.[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x](\beta \neq 0)$, trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n và m; $\alpha$, $\beta$ là các hằng số.

Tương tự như trường hợp trên, ta có:

+ Nếu $\alpha \pm \beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng:

$Y=e^{\alpha x}\left[R_r(x)\cos\beta x+S_r(x)\sin\beta x\right]$.

+ Nếu $\alpha \pm \beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng:

$Y=xe^{\alpha x}\left[R_r(x)\cos\beta x+S_r(x)\sin\beta x\right]$.

trong đó $R_r(x), S_r(x)$ là các đa thức bậc r=max(m,n) có các hệ số mà ta cần xác định bằng hằng số bất định.

- **Ví dụ**: Giải các phương trình sau:

a) $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$

b) $y'' + 4y = \cos 2x$.

## BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 5

-----

**Phương trình vi phân cấp 1 có biến phân li**

1. Giải phương trình: $\sqrt{y^2+1}dx\text{-}xydy=0$.

2. Giải phương trình: $x\sqrt{1\text{-}y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$.

3. Giải phương trình: $y^2y'=x\left(1+x^2\right)$.

4. Giải phương trình: $\left(xy^2+4x\right)dx+\left(y+x^2y\right)dy=0$.

5. Giải phương trình: $xy=\left(1+x^2\right)y'$

6. Giải phương trình: $ydx=\left(x^2\text{-}a^2\right)dy$.

**Giải các bài toán giá trị ban đầu**

7. Giải phương trình: $y'=\dfrac{xy+3x}{x^2+1}$ với y(2)=2.

8. Giải phương trình: $y'+\cos\left(x+2y\right)=\cos\left(x\text{-}2y\right)$ với $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

9. Giải phương trình: $e^{1+x^2}\tan y dx\text{-}\dfrac{e^{2x}}{x\text{-}1}dy=0$ với $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

**Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1**

10. Giải phương trình: $y'+\dfrac{1}{x}y=0$.

11. Giải phương trình: $y'\text{-}\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x \ \left(x>0\right)$.

12. Giải phương trình: $y'\text{-}2xy=2xe^{x^2}$, $y(1)=0$.

**Phương trình Bernoulli**

13. Giải phương trình: $y'\text{-}y=xy^5$.

14. Giải phương trình: $y' - \frac{y}{2x} = -\frac{\sin x}{2x} y^3$

15. Giải phương trình: $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$ .

**Giải các phương trình cho dưới đây nếu đó là phương trình vi phân toàn phần**

16. $\left(3x^2 - 3y + 1\right)dx - (3x - 1)dy = 0$

17. $3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0\left(y > 0\right)$

18. $\left(\cos y + y\cos x\right)dx - \left(\sin x - x\sin y\right)dy = 0$

19. $\left(3x^2 + 6xy - 2y^2\right)dx + \left(3x^2 - 4xy + 4y^3\right)dy = 0$

20. $x\ln y dx - \left(x + y\ln x\right)dy = 0\left(x > 0, y > 0\right)$

21. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

22. $2xydx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$

23. $2y^2\left(x + y^2\right)dx + xy\left(x + 6y^2\right)dy = 0$

24. $\left(3y - e^x\right)dx + xdy = 0$

**Phương trình vi phân cấp 2**

25. Giải phương trình khi biết một nghiệm $y_1$

a) $y'' + y = 0$ biết $y_1 = \cos x$

b) $y'' - y' - 2y = 0$ biết $y_1 = e^{-x}$

c) $\left(x^2 + 1\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$ biết $y_1 = x$

d) $4x^2y'' + y = 0, \left(x > 0\right)$ biết $y_1 = \sqrt{x}$

26. Giải các phương trình sau:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

c) $y'' + 4y = 0$

27. Giải các phương trình sau:

a) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

b) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$

c) $y'' - 2y' + y = x + 1$

d) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

e) $y'' - 2y' + 2y = 2x^2$

f) $y'' - 2y' + y = (2x + 3)e^x$

g) $y'' - y = 2e^x - x^2$

28. Giải các phương trình sau:

a) $y'' - 5y' = \sin 5x$

b) $y'' + y = \sin x$

c) $y'' - y = x\cos^2 x$

d) $y'' - 3y' = e^{2x} + \sin 2x$ .

e) $y'' + 4y = \sin 2x + 1$

f) $y'' + y = \sin^3 x$ .

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

--------

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỂ BIÊN SOẠN NỘI DUNG MÔN HỌC:*

[1] Trần Bình, Bài tập giải sẵn Giải tích I, II, NXBKH và KT, 2008.

[2] Tạ Ngọc Đạt - Nguyễn Đình Trí, Toán cao cấp Tập II, III. NXBGD, 1999.

[3] Nguyễn Hữu Khánh , Vi tích phân A2, Đại học Cần Thơ.

[4] Nguyễn Đình Trí - Tạ Văn Đỉnh - Nguyễn Hồ Quỳnh, Bài tập Toán cao cấp Tập II, III. NXBGD, 2010.

[5] Jean-Marie Monier - Giải tích 1, Giải tích 2, NXB GD, 2006.

- Khác (địa chỉ website): www.ebook.edu.vn, www.violet.vn, www.vms.org.vn.

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỀ NGHỊ CHO HỌC VIÊN:*

[1] Phạm Ngọc Thao, Giáo trình toán đại cương, NXB ĐHQGHN, 1998.

[2] Nguyễn Duy Tiến, Bài giảng giải tích tập II, NXB ĐHQGHN, 2001.