Phụ lục 5

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

TÀI LIỆU GIẢNG DẠY
MÔN VI TÍCH PHÂN A2

GV biên soạn: Nguyễn Văn Tiên

Trà vinh, tháng 2 năm 2013
Lưu hành nội bộ

MỤC LỤC

Nội dung **Trang**

CHƯƠNG 1
ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:
- Hiểu khái niệm hàm nhiều biến.
- Tính đạo hàm và vi phân của hàm nhiều biến.
- Ứng dụng đạo hàm và vi phân để tính gần đúng giá trị của biểu thức, tìm cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1.1. Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Gọi $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,...n\}$ là không gian n chiều ($n \in \mathbb{N}^*$).

Phần tử $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ của $\mathbb{R}^n$ được gọi là điểm hay vectơ, còn x_i (i=1,2,…,n) được gọi là toạ độ thứ i của x.

Hai phần tử $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ và $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ được gọi là bằng nhau nếu $x_i = y_i \ (i = 1,2,...n)$.

Khoảng cách giữa hai điểm $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ và $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ là số

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Trong tài liệu này, ta sẽ làm việc trên không gian nền gồm tập $\mathbb{R}^n$ được trang bị khoảng cách d(x,y) như trên.

Trong $\mathbb{R}^n$ cho điểm M_0 và số thực $\varepsilon > 0$. Lân cận của điểm M_0 bán kính ε là tập hợp $N_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < \varepsilon\}$.

*** Định nghĩa:** Gọi S là tập con của $\mathbb{R}^n$ và $M_0 \in \mathbb{R}^n$**:**

♦ Điểm M_0 được gọi là điểm trong của S nếu tồn tại lân cận N_ε của M_0 sao cho $M_0 \in N_\varepsilon \subset S$. Tập S được gọi là mở nếu mọi điểm của nó điều là điểm trong.

♦ Điểm M_0 được gọi là điểm biên của S nếu với mọi lân cận N_ε của M_0 đều vừa chứa những điểm thuộc S, vừa chứa những điểm không thuộc S, tức là $N_\varepsilon \cap S \neq \varnothing$, $N_\varepsilon \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \varnothing$. Như vậy của S có thể thuộc S, cũng có thể không thuộc S. Tập hợp tất cả các điểm biên của S gọi là biên của S, kí hiệu ∂ S.

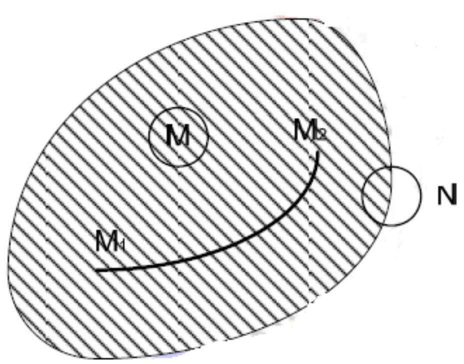
♦ S được gọi là tập đóng nếu mọi điểm biên của S đều là điểm thuộc S, kí hiệu $\overline{S}$.

♦ Phần trong của S là tập các điểm trong của S.

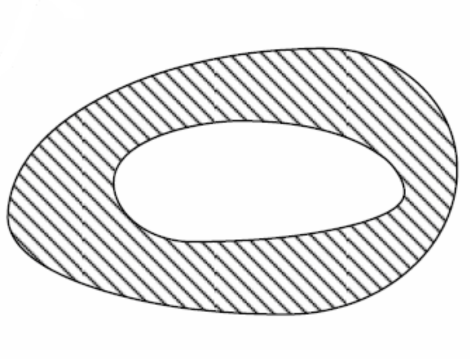
♦ Tập $S=\left\{M\in\mathbb{R}^n / d(M_o,M)<r\right\}$ (r>0) được gọi là hình cầu mở tâm M_o, bán kính r.

♦ Tập S được gọi là bị chặn nếu tồn tại một hình cầu nào đó chứa nó.

♦ Tập S gọi là liên thông nếu với mọi cặp điểm M_1, M_2 trong S đều được nối với nhau bởi một đường cong liên tục nào đó nằm trọn trong S. Tập liên thông S gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (một đường cong kín trong $\mathbb{R}^n$; tập liên thông S gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi từ hai mặt kín trở lên rời nhau từng đôi một.



Hình 1



Hình 2

Trong $\mathbb{R}^2$, tập S trên Hình 1 liên thông, còn tập S trong Hình 2 là không liên thông.

1.1.2. Hàm nhiều biến

1.1.2.1. Định nghĩa

Cho $\mathbb{R}^n$ và $D\subset\mathbb{R}^n$.

Ánh xạ $f: D\to\mathbb{R}$

$$M=\left(x_1,...,x_n\right)\mapsto u=f\left(M\right)=f\left(x_1,...,x_n\right)$$

gọi hàm số của n biến số xác định trên D.

Tập D được gọi là tập xác định của hàm f. Đó là tập các điểm $\left(x_1,x_2,...x_n\right)$ sao cho $f\left(x_1,x_2,...x_n\right)$ xác định.

Tập $\left\{f\left(M\right)/M\in D\right\}$ gọi là tập giá trị của hàm số.

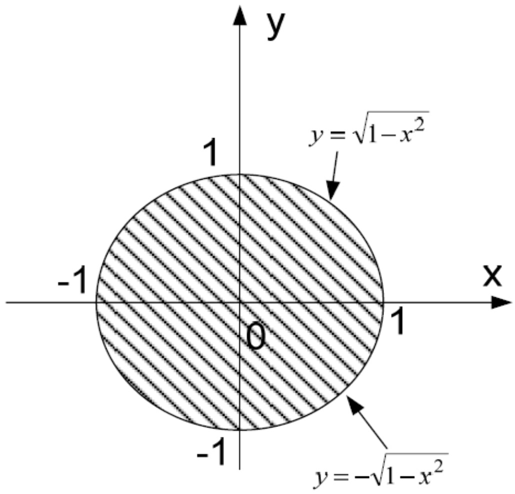
Khi n=2 hoặc n=3 ta thường kí hiệu $z=f\left(x,y\right)$, $u=f\left(x,y,z\right)$.

1.1.2.2. Ví dụ

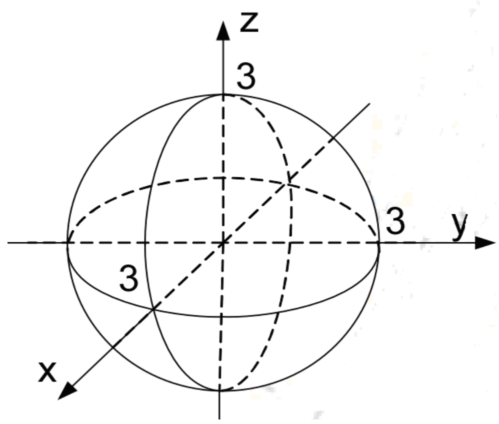
Trong $\mathbb{R}^2$, cho hàm số $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ thì $D=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$. (hình 3)

Trong $\mathbb{R}^3$, cho hàm số $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$ thì

$$D=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<9\}. \text{ (hình 4)}$$



Hình 3

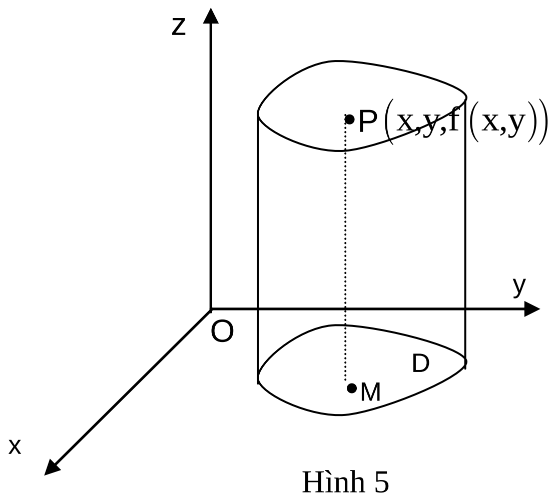


Hình 4

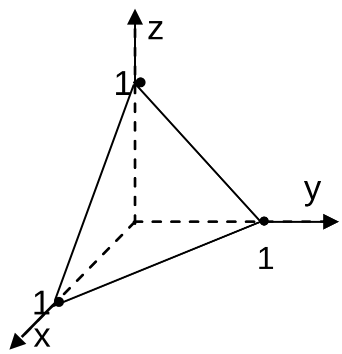
1.1.3. Biểu diễn hình học của hàm hai biến

Giả sử hàm hai biến $z=f(x,y)$ xác định trên miền D. Ta thấy cặp (x,y) biểu diễn một điểm M(x,y) trong mặt phẳng Oxy, nên có thể xem hàm hai biến f(x,y) là hàm của điểm M(x,y). Ta biểu diễn hình học hàm hai biến như sau:

Vẽ hệ trục toạ độ Đêcác vuông góc Oyxz. Với mọi điểm M(x,y) trong miền D của mặt phẳng Oxy cho tương ứng với một điểm P trong không gian có toạ độ là $(x,y,f(x,y))$. Quỹ tích của điểm P khi M chạy trong miền D được gọi là đồ thị của hàm hai biến $z=f(x,y)$.



Hình 5



Hình 6

Đồ thị của hàm hai biến thường là một mặt cong trong không gian, mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy là miền xác định của hàm.

Ví dụ:

Hàm z=1-x-y $(0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1-x)$ có đồ thị là một mặt tam giác với các đỉnh (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). (Hình 6)

1.1.4. Mặt bậc hai

Mặt bậc hai là những mặt mà phương trình của chúng là bậc hai đối với x,y, z.

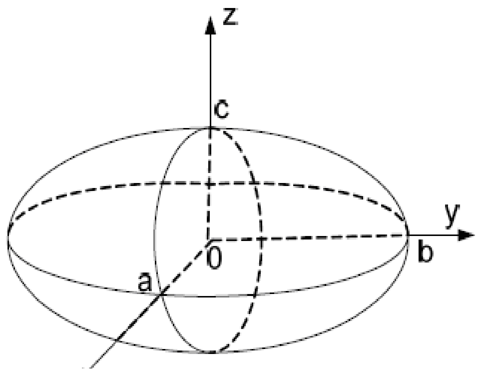
1.1.4.1. Mặt elipxôit

Mặt elipxôit là mặt có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

Trong đó a, b, c là những số dương. Vì x, y, z có mặt trong phương trình có mũ chẵn nên mặt elipxôit nhận các mặt phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng, nhận O làm tâm đối xứng.

⬩ Cắt mặt elipxôit bởi các mặt phẳng tọa độ xOy, yOz, zOx, các giao tuyến theo thứ tự là các đường elip:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0;$$

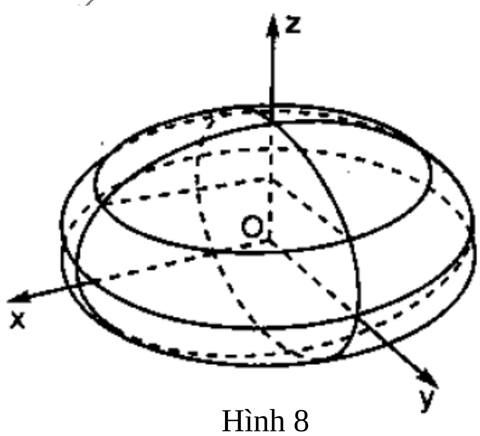
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0;$$

`⬩ Cắt mặt elipxôit bởi mặt phẳng z=k, k là hằng số, giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}, z=k \quad (*)$$

Nếu k<-c hoặc k>c thì phương trình (*) vô nghiệm, mặt phẳng z=k không cắt mặt elipxôit.

Nếu $k=\pm c$ thì giao tuyến thu về điểm $(0,0,\pm c)$.



Hình 8

Nếu –c<k<c thì phương trình (*) có thể viết:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}=1, \ z=k$$

Đó là phương trình của đường elip có tâm tại (0,0,k), có bán kính trục là

$$a\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}, \ b\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$$

Khi k tăng từ 0 đến c, các bán kính trục nhỏ dần đến 0. Khi k tăng từ -c đến c giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt elipxôit. Các hằng số a, b, c gọi là các bán kính trục của elipxôit.

Nếu hai trong ba bán trục bằng nhau, chẳng hạn a=c, ta có mặt elipxôit tròn xoay, sinh bởi đường elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, z=0 quay quanh trục Oz. Nếu a=b=c, mặt elipxôit trở thành mặt cầu tâm O bán kính a.

1.1.4.2. Mặt hypebôlôit một tầng

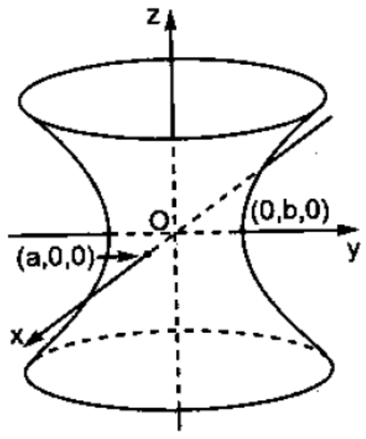
Mặt hypebôlôit một tầng phương trình có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Trong đó a, b, c là những số dương. Mặt đó nhận các phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng, nhận O làm tâm đối xứng. Mặt hypebôlôit một tầng cắt mặt phẳng tọa độ xOy theo đường elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, z=0; nó cắt các mặt phẳng tọa xOz, yOz theo các đường hypebol.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad y=0;$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0$$



Hình 9

- Giao tuyến của mặt hypebôlôit một tầng với mặt phẳng z=k, k là hằng số, là đường elip có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\ z=k$$

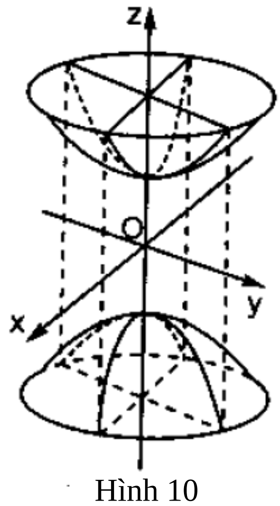
Khi $|k|$ tăng từ 0 đến $+\infty$, các bán trục của elip đó theo thứ tự tăng từ a đến $+\infty$ và từ b đến $+\infty$. Khi k biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$ giao tuyến đó dịch chuyển và sinh ra mặt hypebôlôit một tầng.

Nếu a=b, ta có mặt hypebôlôit một tầng tròn xoay, do hypebol $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, y=0 quay quanh trục Oz sinh ra.

1.1.4.3. Mặt hypebôlôit hai tầng

Mặt hypebôlôit hai tầng là mặt có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$



Hình 10

Trong đó a, b, c là những số dương. Mặt hypebôlôit nhận các mặt phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng, nhận O làm tâm đối xứng.

- Cắt mặt hypebôlôit hai tầng bởi mặt phẳng z=k, k là hằng số, giao tuyến có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1,\ z=k$$

Nếu $|k|<c$ thì mặt phẳng z=k không cắt mặt hypebôlôit hai tầng.

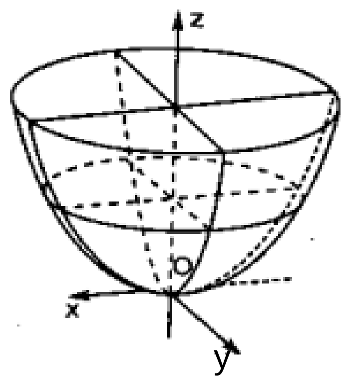
Nếu $k=\pm c$ thì mặt phẳng z=k tiếp xúc mặt hypebôlôit hai tầng tại (0,0,c) hoặc (0,0,-c).

Nếu $|k|>c$ thì giao tuyến của mặt phẳng z=k với mặt hypebôlôit hai tầng là đường elip có bán trục là $a\sqrt{\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)},\ b\sqrt{\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)}$.

Khi $|k|$ tăng từ c đến $+\infty$, các bán kính trục lớn dần từ 0 đến $+\infty$, giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt hypebôlôit hai tầng.

Nếu a=b, ta có mặt hai tầng tròn xoay, do hypebôn $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,\ z=0$ quay quanh trục Oz sinh ra.

1.1.4.4. Mặt parabôlôit eliptic



Hình 11

Đó là mặt có phương trình $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ trong đó p, q là các số dương.

Mặt parabôlôit eliptic nhận các mặt phẳng yOz, zOx làm mặt đối xứng.

♦ Mặt parabôlôit eliptic cắt các mặt phẳng x=0, y=0 theo các đường parabôn nhận Oz làm trục: $y^2=2qz,\ x=0$; $x^2=2pz,\ y=0$.

♦ Giao tuyến của mặt parabôlôit eliptic với mặt phẳng z=k là đường elip có các bán trục: $\sqrt{2pk}$, $\sqrt{2qk}$: $\frac{x^2}{2pk}+\frac{y^2}{2qk}=2z$, z=k nếu k>0, là gốc toạ độ nếu k=0. Khi k tăng từ 0 đến $+\infty$, giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt parabôlôit eliptic.

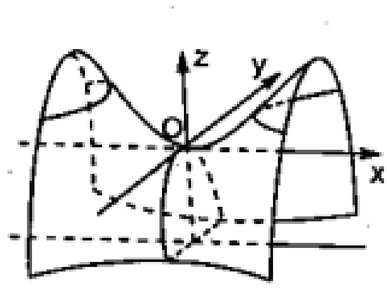
1.1.4.5. Mặt parabôlôit hypebôlic

Đó là mặt có phương trình $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ trong đó p, q là các số dương.

Mặt parabôlôit hypebôlic nhận các mặt phẳng yOz, zOx làm mặt đối xứng.

♦ Cắt mặt parabôlôit hypebôlic bởi mặt phẳng zOx giao tuyến là đường parabol $x^2=2pz,\ y=0$, parabôn này nhận Oz làm trục.

♦ Cắt mặt parabôlôit hypebôlic bởi mặt phẳng x=k song song với mặt phẳng yOz, ta được đường: $y^2=-2q\left(z-\frac{k^2}{2p}\right)$, x=k. Đó là đường parabôn có tham số q, có trục song song với Oz, quay bề lõm về phía z<0, có đỉnh nằm trên đường $x^2=2pz$, y=0. Khi k biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$, giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt parabôlôit hypebôlic.



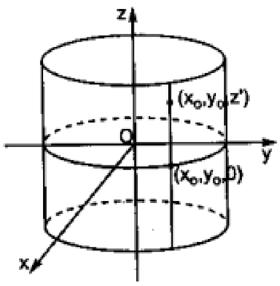
Hình 12

♦ Cắt mặt parabôlôit hypebôlic bởi mặt phẳng z=k, ta được đường $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, z=k.

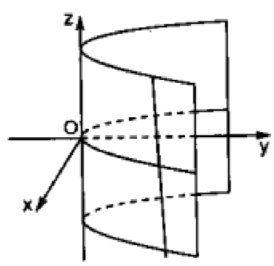
Nếu k>0, đó là đường hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng zOx và song song với Ox, có bán trục thực $\sqrt{2pk}$, bán trục ảo $\sqrt{2qk}$. Nếu k<0, đó là đường hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng yOz và song song với Oy, bán trục thực $\sqrt{-2qk}$, bán trục ảo $\sqrt{-2pk}$. Nếu k=0, phương trình của giao tuyến trở thành $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0;\ z=0$, nên giao tuyến trong trường hợp này là cặp đường thẳng giao nhau $y=\mp\sqrt{\frac{q}{p}}x$ trong mặt phẳng Oxy.

1.1.4.6. Mặt trụ bậc hai

Nếu 1 trong 3 biến số không có mặt trong phương trình của mặt nào đó thì mặt đó là mặt trụ.



Hình 13



Hình 14

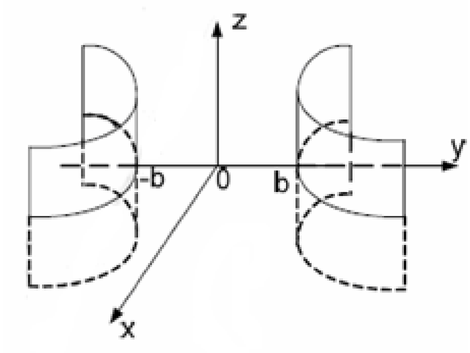
♦ Chẳng hạn, mặt có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó a, b là các hằng số dương là mặt trụ elip có đường sinh song song trục Oz.

♦ Mặt có phương trình $y=x^2$ biểu diễn mặt trụ parabôn có đường sinh song song trục Oz.

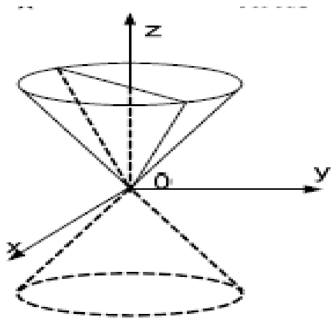
♦ Mặt trụ hyperbolic có phương trình: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

1.1.4.7. Mặt nón bậc hai

Phương trình chính tắc của mặt nón có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (Hình 16).



Hình 15



Hình 16

1.1.5. Giới hạn của hàm nhiều biến

1.1.5.1. Định nghĩa

Nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$; kí hiệu $M_n \to M_0$ khi $n\to\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_n,M_0)=0$ hay $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0\end{cases}$

1.1.5.2. Định nghĩa

Cho hàm z = f(M)=f(x,y) xác định trong lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$, có thể trừ tại điểm M_0. Ta nói rằng hàm f(M) có giới hạn là L khi M(x,y) dần đến $M_0(x_0,y_0)$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ (khác M_0) thuộc lân cận U dần đến M_0 ta đều có: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=L$.

Thường kí hiệu:

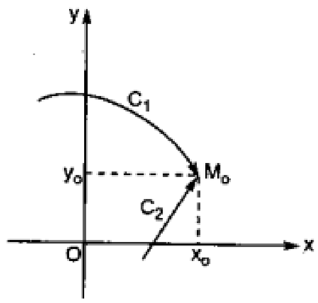
$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=L$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ hay $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$.

(Sử dụng ngôn ngữ ε, δ ta cũng có định nghĩa sau: Hàm f(M) có giới hạn là L khi $M\to M_0$ khi và chỉ khi $\forall\varepsilon>0, \exists\delta = \delta(\varepsilon,M_0) > 0$ sao cho $d(M_0,M)<\delta \Rightarrow |f(M) - L|<\varepsilon$).

***Chú ý:**

1. Tất cả các khái niệm giới hạn vô hạn hoặc các định lí về giới hạn: tổng, tích, thương đều giống như hàm số một biến số.

2. Từ định nghĩa ta nhận thấy: Giới hạn L của hàm số f(x,y) khi $M\to M_0$ không phụ thuộc đường đi của M tiến đến M_0. Vì thế, nếu khi dãy M_n tiến đến M_0 trên hai đường C_1, C_2 khác nhau mà dãy $f(M_n)$ tiến đến hai giới hạn khác nhau thì hàm số không có giới hạn tại M_0.



Hình 17

1.1.5.3. Ví dụ

1. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

Giải

Ta có $M_0(1,1)$ không thuộc miền xác định D của hàm số đã cho.

Xét dãy điểm bất kì $M_k(x_k,y_k)\subset D$ hội tụ đến điểm $M_0(1,1)$, nghĩa là: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1,\ \lim\limits_{k\to\infty} y_k = 1$. Giới hạn của dãy giá trị hàm số tương ứng là:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(M_k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k^2-y_k^2}{x_k-y_k} = \lim_{k\to\infty}\left(x_k+y_k\right) = 1+1.$$

Vậy hàm số có giới hạn tại $M_0(1,1)$ bằng 2.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f\left(x,y\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

Giải

Ta có:

$$0 \le \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = \frac{|x+y|}{\left|x^2-xy+y^2\right|} \le \frac{|x+y|}{\left|x^2+y^2\right|-|xy|}$$

$$\le \frac{|x+y|}{2|xy|-|xy|} = \frac{|x+y|}{|xy|} \le \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| \to 0 \text{ khi } \begin{cases} x\to\infty \\ y\to\infty \end{cases}$$

Theo nguyên lý kẹp ta được:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f\left(x,y\right) = \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Giải

Ta có $D=\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(0,0\right)\right\}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = |x|\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|}{2}$$

Do đó khi $x\to 0$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f\left(x,y\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn tại điểm $M_0(0,0)$:

$$f\left(x,y\right) = \frac{x^2+3y^2}{5xy}$$

Giải

Xét dãy điểm $M_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\subset D$ miền xác định của hàm số và dãy điểm này hội tụ đến điểm $M_0(0,0)$. Khi đó dãy hàm số tương ứng có giới hạn là:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_k,y_k\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}{\frac{5}{k^2}}=\frac{4}{5}$$

Mặt khác, xét dãy điểm $N_k\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right)\subset D$.

Dãy giá trị hàm số tương ứng có giới hạn là:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_k,y_k\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}+\frac{12}{k^2}}{\frac{10}{k^2}}=\frac{13}{10}$$

Vậy theo định nghĩa hàm số đã cho không có giới hạn tại điểm $M_0(0,0)$.

1.1.6. Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

1.1.6.1. Định nghĩa

Giả sử $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, điểm M_0 thuộc D.

Hàm số f được gọi là liên tục tại M_0 nếu:

i) $M_0\in D$ (tức là tồn tại giá trị $f(M_o)$)

ii) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

iii) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f\left(M_0\right)$.

Giả sử hàm số f(M) xác định trên miền D. Nói rằng hàm số liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm $M\in D$.

Hàm số f(M) liên tục trên miền đóng $\overline{D}$ nếu nó liên tục trên miền D và liên tục tại mọi điểm $N\in\partial D$.

***Chú ý:** Với $M_0(x_0, y_0)$, gọi: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, là các số gia của các biến độc lập x, y và $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ là số gia toàn phần của hàm số f(x,y) tương ứng với các số gia Δx, Δy. Khi đó hàm số f(x,y) liên tục tại (x_0,y_0) nếu nó xác định tại (x_0,y_0) và $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=0$.

1.1.6.2. Định nghĩa

Hàm số u=f(M) được gọi là gián đoạn tại M_0 nếu nó không liên tục tại điểm này.

Như vậy hàm u=f(M) gián đoạn tại M_0 nếu:

i) Hoặc không xác định tại M_0.

ii) Hoặc hàm xác định tại M_0 nhưng không tồn tại $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

iii) Hoặc hàm xác định tại M_0 nhưng $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) \neq f\left(M_0\right)$.

1.1.6.3. Ví dụ

Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=y=0\end{cases}$

Giải

Hàm số $f\left(x,y\right)$ liên tục tại mọi điểm $x^2+y^2\neq 0$.

Xét tính liên tục của $f\left(x,y\right)$ tại (0,0):

Ta có: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f\left(0,0\right)$

Vậy $f\left(x,y\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\left|xy\right|^{\alpha}}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=y=0\end{cases}$

trong đó α là hằng số dương.

Giải

Hàm số $f\left(x,y\right)$ liên tục tại mọi điểm $x^2+y^2\neq 0$.

Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x,y\right)$ tại điểm (0,0).

Ta có $\left|xy\right|\leq\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\left|f\left(x,y\right)\right|\leq\dfrac{1}{2^{\alpha}}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}$

Nếu $\alpha>1$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=0=f\left(0,0\right)$.

Vậy $f\left(x,y\right)$ liên tục tại điểm (0,0).

Nếu $\alpha\leq 1$ thì

Ta có: $f\left(x,x\right)=\dfrac{x^{2\alpha}}{2x^2}=\dfrac{1}{2x^{2(1-\alpha)}}$. Nên $f\left(x,x\right)$ không dần tới 0 khi $x\longrightarrow 0$.

Vậy $f\left(x,y\right)$ không liên tục tại (0,0).

1.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.2.1. Đạo hàm riêng

1.2.1.1. Định nghĩa

Cho Z= f(x,y) xác định trong miền D và $M_0(x_0,y_0) \in D$. Cố định $y=y_0$, nếu hàm $f(x,y_0)$ có đạo hàm theo biến x tại $x=x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm f(x,y) theo biến x tại $M_0(x_0,y_0)$.

Ký hiệu: Z'_x, $f_x'(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial Z}{\partial x}(x_0,y_0)$, tức là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Tương tự: Cố định $x=x_0$, nếu hàm $f(x_0,y)$ có đạo hàm theo biến y tại $y=y_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm f(x,y) theo biến y tại $M_0(x_0, y_0)$.

Ký hiệu : Z'_y, $f_y'(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial Z}{\partial y}(x_0,y_0)$. tức là

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Một cách tổng quát, ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm riêng ra đối với hàm n biến với $n\geq 3$. Chẳng hạn, đạo hàm riêng theo biến z của hàm $u=f\left(x,y,z\right)$ tại $M_0(x_0, y_0,z_0)$ là:

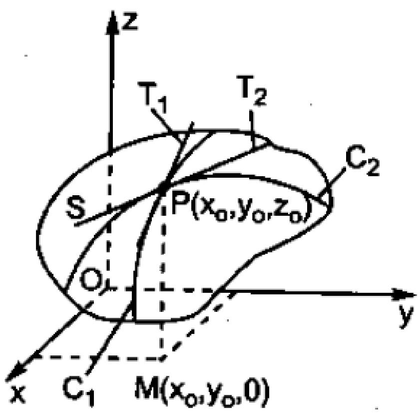
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta y)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}$$

*** Nhận xét:** Như vậy khi tính đạo hàm riêng theo biến x tại (x_0,y_0) bằng cách coi $y=y_0$ là hằng số và tính đạo hàm của hàm một biến $f(x,y_0)$ tại $x=x_o$. Tương tự, tính đạo hàm riêng theo biến y tại (x_0,y_0) ta tính đạo hàm của hàm một biến $f(x,y_0)$ tại $y=y_o$ (xem $x=x_o$ là hằng số).

Như vậy, theo nhận xét trên thì các quy tắc và công thức tính đạo hàm riêng cũng giống như quy tắc và các công thức tính đạo hàm hàm một biến.

1.2.1.2. Ý nghĩa

Gọi S là đồ thị của hàm số $Z=f\left(x,y\right)$, C_1 là giao tuyến của S và mặt phẳng $y=y_0$, C_1 chính là đồ thị của hàm số một biến số $f\left(x,y_0\right)$ trên mặt phẳng $y=y_0$. Do đó đạo hàm riêng $f'_x\left(x_0,y_0\right)$ là hệ số góc của đường tiếp



Hình 18

tuyến T_1 của C_1 tại điểm $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$ trong đó $Z_0=f\left(x_0,y_0\right)$. Còn đạo hàm riêng $f'_y\left(x_0,y_0\right)$ là hệ số góc của đường tiếp tuyến T_2 của C_2 của mặt S với mặt phẳng $x=x_0$ tại điểm $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

Đạo hàm riêng của hàm số z=f(x,y) theo biến x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ cũng biểu thị vận tốc biến thiên của hàm số $Z=f\left(x,y\right)$ theo hướng x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$, còn đạo hàm riêng của hàm số Z=f(x,y) theo biến y tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ biểu thị vận tốc biến thiên của hàm số $Z=f\left(x,y\right)$ theo hướng y tại điểm $M_0(x_0,y_0)$,

1.2.1.3. Ví dụ

a) Tìm đạo hàm riêng của hàm số $Z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$.

b) Tìm đạo hàm riêng của hàm số $u=e^{x^2y}\cos z$.

c) Tìm đạo hàm riêng của hàm số $u=\text{acrtan}\left(x-y\right)^z$.

1.2.1.4. Đạo hàm riêng cấp cao

♦ **Định nghĩa**

Giả sử hàm $Z=f\left(x,y\right)$ có các đạo hàm riêng $Z'_x,\ Z'_y$. Các đạo hàm riêng này được gọi là đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $Z=f\left(x,y\right)$. Chúng cũng là các hàm số theo biến x, y. Vì vậy có thể xét đạo hàm riêng của chúng: $\left(Z'_x\right)'_x$, $\left(Z'_x\right)'_y$, $\left(Z'_y\right)'_x$, $\left(Z'_y\right)'_y$ gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $Z=f\left(x,y\right)$. Ta dùng các kí hiệu sau:

$$\left(Z'_x\right)'_x=Z''_{xx}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},\ \left(Z'_x\right)'_y=Z''_{xy}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x},$$

$$\left(Z'_y\right)'_x=Z''_{yx}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y},\ \left(Z'_y\right)'_y=Z''_{yy}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

Tổng quát, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp (n-1) của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp n của hàm Z.

♦ **Định lí 1.** (Định lí Schwartz)

Nếu hàm $Z=f\left(x,y\right)$ có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ trong miền D và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại $\left(x_0,y_0\right)\in D$ thì

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right).$$

Định lí Schwartz còn được mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến và cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn. Chẳng hạn, hàm số $u=f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng cấp 3 liên tục tại điểm $(x_0,y_0,z_0)\in D$ thì

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial y}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0)$$

♦**Ví dụ:**

Tính đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

a) $Z=f(x,y)=x^2e^y+x^3y^2-y^5$.

b) $Z=f(x,y)=e^{\sin\frac{y}{x}}+\arctan xy$.

c) $u=f(x,y,z)=z^2e^{x-yz}$.

1.2.2. Vi phân

1.2.2.1. Định nghĩa

Cho hàm số $Z=f(x,y)$ xác định trong miền D và $(x_0,y_0)\in D$. Cho x số gia Δx, y số gia Δy sao cho $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$.

Hàm $Z=f(x,y)$ được gọi là khả vi tại (x_0,y_0) nếu số gia toàn phần

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

có thể viết dưới dạng:

$$\Delta f=A.\Delta x+B.\Delta y+\alpha.\Delta x+\beta.\Delta y$$

trong đó, A, B là các hằng số; $\alpha,\ \beta\to 0$ khi $\Delta x,\ \Delta y\to 0$.

Khi đó đại lượng $A.\Delta x+B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm $Z=f(x,y)$ tại (x_0,y_0) và kí hiệu là $df(x_0,y_0)$ hay dz. Ta có:

$$dz=df(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y$$

Hàm $Z=f(x,y)$ gọi là khả vi trong miền D nếu $Z=f(x,y)$ khả vi tại mọi điểm $(x,y)\in D$.

***Nhận xét:**

Từ định nghĩa trên, ta có:

Hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại $(x_0,y_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-df}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$.

1.2.2.2. Điều kiện khả vi của hàm số

***Điều kiện cần**

♦ **Định lí 2:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì hàm $Z=f(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0).

♦ **Định lí 3:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì tại đó tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ và có

$$\boxed{df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y}$$

***Nhận xét:**

i) Nếu hàm số $Z=f(x,y)=x$ thì $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=1$ và $\dfrac{\partial Z}{\partial y}=0$. Ta có

$$dx=dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y=\Delta x$$

Tương tự, nếu hàm số $Z=f(x,y)=y$ thì $\dfrac{\partial Z}{\partial y}=1$ và $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=0$. Ta có

$$dy=dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y=\Delta y.$$

Do đó vi phân của hàm $Z=f(x,y)$ thường được viết dưới dạng:

$$\boxed{dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy}$$

ii) Biểu thức vi phân có thể mở rộng cho hàm nhiều biến $n\geq 3$ biến. Chẳng hạn

▪ Với hàm ba biến $u=f(x,y,z)$, ta có:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Với hàm n biến $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, ta có:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

Theo định lí 3 thì hàm $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì tại (x_0,y_0) tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$. Tuy nhiên sự tồn tại các đạo hàm riêng này không đủ để khẳng định rằng hàm $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0).

Chẳng hạn xét hàm $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ tại (0,0). Ta có:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

Tương tự, $f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta x)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

Nhưng hàm $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ không khả vi tại (0,0), thật vậy:

Xét $\frac{\Delta f-\left[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

Lấy $\Delta x=\Delta y$ thì $\frac{\Delta f-\left[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x^{2/3}}{2|\Delta x|}\to\infty$.

***Điều kiện đủ**

♦ **Định lí 4:** Nếu hàm số $Z=f(x,y)$ có tại các đạo hàm riêng ở lân cận điểm (x_0,y_0) và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại (x_0,y_0) thì $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0).

*** Chú ý:** Ta có các công thức tính vi phân của hàm hai biến giống như ở hàm một biến.

$$d(au)=adu$$
$$d(u\pm v)=du\pm dv$$
$$d(uv)=vdu+udv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

Nhờ các công thức trên ta có thể rút ngắn việc tính vi phân của hàm hai biến.

1.2.2.3. Ví dụ

1) Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

a) $Z=\sqrt{x^2+y^2}$.

b) $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

2) Tính vi phân toàn phần của hàm số: $Z=f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ tại $M_0(1,2)$ biết $\Delta x=0,1;\ \Delta y=0,2$.

1.2.2.4. Ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng

Giả sử hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0). Ta có:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Trong đó $\alpha\to 0$ khi $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$

Khi $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ khá bé thì

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\approx f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y$$

Ta có công thức xấp xỉ

$$\boxed{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y}$$

Ví dụ:

Tính giá trị gần đúng của $A=(1,04)^{2,03}$.

Giải

Xét hàm $f(x,y)=x^y$, ta có

$$f'_x(x,y)=yx^{y-1};\ f'_y(x,y)=x^y\ln x.$$

Khi đó ta được công thức tính gần đúng

$$A=\left(x_0+\Delta x\right)^{(y_0+\Delta y)}\approx x_0^{\ y_0}+y_0x_0^{y_0-1}\Delta x+x_0^y\ln x_0\Delta y$$

Nếu chọn

$$x_0=1,\ \Delta x=0,04$$
$$y_0=2,\ \Delta y=0,03$$

thì $A\approx 1+2.1.(0,04)+1.\ln 1.(0,03)=1,08$.

1.2.2.5. Vi phân cấp cao

♦ **Định nghĩa**

Giả sử hàm số $Z=f(x,y)$ khả vi. Khi vi phân toàn phần $dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy$ cũng là hàm của hai biến x, y. Nếu dZ có vi phân toàn phần thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp hai của Z, kí hiệu d^2Z. Ta có

$$d^2Z=d(dZ).$$

Tổng quát, vi phân của vi phân cấp n-1 của hàm Z được gọi là vi phân cấp n hay n lần khả vi.

$$d^nZ=d(d^{n-1}Z).$$

Hàm số có vi phân cấp n được gọi là khả vi đến cấp n hay n lần khả vi.

♦ **Công thức tính vi phân cấp cao**

Giả sử hàm số $Z=f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục. Ta có:

$$dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy \text{ với dx, dy không đổi.}$$

Suy ra

$$d^2Z=d(dZ)=d\left(\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy^2$$

$$\overset{\text{Kí hiệu}}{=}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

Tương tự đối với vi phân cấp cao hơn hai, ta đi đến công thức tổng quát

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

***Chú ý:**

i) Công thức trên vi phân cấp cao kí hiệu như trên được hiểu một cách hình thức là luỹ thừa bậc n của một nhị thức. Sau khi khai triển hàm z được đặt vào trong dấu ∂.

ii) Nếu x, y lại là hàm của hai biến độc lập s, t nào đó thì công thức trên không còn đúng khi $n \geq 2$.

♦ **Ví dụ:**

Tính vi phân cấp 2 của hàm số $Z = f(x, y) = e^x.\sin y$

Ta có : $Z'_x = e^x.\sin y,\ Z'_y = e^x.\cos y \Rightarrow Z''_{xx} = e^x.\sin y, Z''_{xy} = Z''_{xy} = e^x.\cos y, Z''_{yy} = -e^x \sin y$.

1.2.3. Đạo hàm của hàm hợp

1.2.3.1. Định nghĩa

Cho hàm $Z = f(u,v)$ trong đó $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ là hàm của hai biến độc lập x, y. Khi đó $Z = f[u(x,y),v(x,y)]$ là hàm hợp của hai biến x, y qua hai biến trung gian x, y.

1.2.3.2. Định lí 5

Cho hàm $Z = f(u,v)$ trong đó $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Nếu các hàm $f(u,v)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đối với các biến của chúng thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$ và có

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

***Chú ý:**

i) Nếu $Z=f(u,v)$ với $u=u(x)$, $v=v(x)$ là các hàm của x thì $Z=f[u(x),v(x)]$ là hàm một biến theo x. Khi đó $\frac{dZ}{dx}$ được gọi là đạo hàm toàn phần của Z theo x.

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{\partial Z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

ii) Từ định lí 5, ta có thể biểu diễn dạng phương trình ma trận sau

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial x}\\ \frac{\partial Z}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial u}\\ \frac{\partial Z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

Ma trận $\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ gọi là ma trận Jacobian của u, v đối với x, y và định thức của ma trận này gọi là định thức Jacobian của u, v đối với x, y được kí hiệu $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

1.2.3.3. Ví dụ:

1) Cho hàm số $Z=e^{u}.\sin v$ với u=xy, v=x+y. Hãy tính $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$.

2) Cho hàm số $Z=e^{x^2+y}$ với $x=t^2$, $y=\ln t$. Tính $\frac{\partial Z}{\partial t}$.

1.2.4. Đạo hàm của hàm ẩn

1.2.4.1. Định nghĩa

Nếu hai giá trị của 2 biến x, y quan hệ với nhau bởi hệ thức F(x,y) =0, ở đây coi F(x,y) như một hàm 2 biến xác định trên miền $D\subset\mathbb{R}^2$.

Nếu với mỗi $x=x_0\in X$ xác định đúng một giá trị $y=y_0$ sao cho $F(x_0,y_0)=0$ thì hệ thức F(x,y) xác định hàm một biến y = y(x) trên tập X.

Ví dụ: Xét hệ thức $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$

Với $\forall x\in[-1,1]$, ta có $y(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$

Vậy hàm $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x\in[-1,1]$ và hàm $y(x)=-\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x\in[-1,1]$ là các hàm ẩn xác định bởi hệ thức $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

1.2.4.2. Định lí 6 (công thức tính đạo hàm của hàm ẩn)

Cho hàm 2 biến F(x,y) xác định trong một lân cận của điểm (x_0,y_0) và $F(x_0,y_0)=0$, giả thiết rằng F(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục và $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ tại mọi điểm (x,y) thuộc lân cận của. Khi đó tồn tại duy nhất hàm liên tục y=y(x) xác định trong lân cận của x_0 thoả mãn điều kiện: $y=y(x_0)$, $F(x,y(x))=0$ và $y'_x=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ (hay $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$).

Tương tự, giả sử hệ thức $F(x,y,z)=0$ xác định hàm ẩn hai biến duy nhất $z=z(x,y)$ theo định lí 6 tồn tại hàm ẩn.

Thay z bởi $z(x,y)$ vào hệ thức ta được đồng nhất thức $F[x,y,z(x,y)]=0$

Với $F'_z \neq 0$ thì ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

1.2.4.3. Ví dụ

Tìm đạo của các hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $xe^y-ye^x-e^{xy}=0$, tính y'.

b) $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Giải

a) Đặt $F(x,y)=xe^y-ye^x-e^{xy}$.

Ta có: $y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{e^y-ye^x-e^{xy}.y}{xe^y-e^x-e^{xy}.x}$.

b) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$

Ta có: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{2x}{2z}=\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{2y}{2z}=\dfrac{y}{z}$.

1.3. CỰC TRỊ VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1.3.1. Cực trị của hàm hai biến

1.3.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $Z=f(x,y)$ xác định trong $D\subseteq\mathbb{R}^2$ và $U(M_0)$ là một lân cận nào đó của $M_0(x_0,y_0)\in D$. Ta nói,

- Hàm Z đạt cực đại tại M_0 nếu $f(M) < f(M_0)$ với mọi $M\in U(M_0)$.
- Hàm Z đạt cực tiểu tại M_0 nếu $f(M) > f(M_0)$ với mọi $M\in U(M_0)$.

Cực đại và cực tiểu của hàm $Z=f(x,y)$ được gọi chung là cực trị của hàm số Z.

Tại $M_0(x_0; y_0)$ mà hàm đạt được cực trị gọi là điểm cực trị của hàm số.

1.3.1.2. Quy tắc tìm cực trị

- **Định nghĩa:**

- Điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là điểm dừng của hàm số f(x,y) nếu $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.

- Điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là điểm kì dị của hàm số f(x,y) nếu $f'_x(x_0,y_0)$ hoặc $f'_y(x_0,y_0)$ không tồn tại.

Điểm dừng và điểm kì dị được gọi chung là điểm tới hạn.

♦ **Định lý 1:** (điều kiện cần)

Nếu hàm $Z=f(x,y)$ đạt được cực trị tại $M_0(x_0; y_0)\in D$ và tại đây hàm số có các đạo hàm riêng hữu hạn $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ thì các đạo hàm riêng đó phải triệt tiêu, tức là $f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$.

*** Chú ý:**

- Định lý 1 cho phép ta hạn chế việc xét cực trị tại điểm dừng và điểm kì dị, ta gọi các đểm này là các điểm tới hạn.

- Nếu D mở và $Z=f(x,y)$ không có điểm kì dị thì điều kiện $f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$ chỉ là điều kiện cần để hàm đạt cực trị tại (x_0,y_0). Tuy nhiên nó không đủ để quyết định hàm đạt cực trị tại điểm này.

Chẳng hạn hàm Z=xy có điểm dừng (0,0) nhưng hàm không đạt cực trị tại điểm này vì với những điểm (x,y) gần điểm (0,0) mà x>0, y<0 thì $f(x,y)<f(0,0)=0$ và với những điểm (x,y) gần điểm (0,0) mà x>0, y>0 thì $n\to\infty$

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để có cực trị.

♦ **Định lý 2:** (Điều kiện đủ)

Giả sử $M(x_0,y_0)$ là điểm dừng của hàm số $Z=f(x,y)$ và tại đây hàm số $Z=f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Đặt $A=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$, $\Delta=B^2\text{-}AC$. Khi đó,

i) Nếu $\Delta<0$ thì $Z=f(x,y)$ có cực trị tại $M(x_0,y_0)$ và hàm $Z=f(x,y)$ có cực đại nếu A<0 và có cực tiểu nếu A>0.

ii) Nếu $\Delta>0$ thì $Z=f(x,y)$ không có cực trị tại $M_0(x_0; y_0)$.

iii) Nếu $\Delta=0$: chưa kết luận được cực trị của hàm $Z=f(x,y)$ tại $M_0(x_0;y_0)$.

♦ **Ví dụ:** Tìm cực trị của các hàm số sau:

1) $Z=x^3+2y^3-3x-6y$

Ta có: $Z'_x = 3x^2 - 3,\ Z'_y = 6y^2 - 6$.

Tọa độ các điểm dừng là: $M_1(1,1), M_2(-1,1), M_3(-1,-1), M_4(1,-1)$.

$$Z''_{xx} = 6x,\ Z''_{xy} = 0,\ Z''_{yy} = 12y$$

Tại $M_1(1,1)$, ta có $\Delta = -72 < 0$ và $A = 6 > 0 \Rightarrow M_1(1,1)$ là điểm cực tiểu.

Tại $M_2(-1,1)$, ta có $\Delta = 72 > 0 \Rightarrow M_2(-1,1)$ không là điểm cực trị.

Tại $M_3(-1,-1)$, ta có $\Delta = -72 < 0$ và $A = -6 < 0 \Rightarrow M_3(-1,-1)$ là điểm cực đại.

Tại $M_4(1,-1)$, ta có $\Delta = 72 > 0 \Rightarrow M_4(1,-1)$ không là điểm cực trị.

2) $Z = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ Z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Tọa độ các điểm dừng là: $M_1(1; 1)$; $M_2(0; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z''_{xx} = 6x \\ Z''_{xy} = -3 \\ Z''_{yy} = 6y \end{cases}$$

Ta có:

Tại $M_1(1; 1)$, $B_1^2 - A_1C_1 = 9 - 36 = -27 < 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $M_1(1; 1)$ và giá trị cực tiểu là $Z = Z(M_1) = -1$

Tại $M_2(0; 0)$, $B_2^2 - A_2C_2 = 9 > 0$

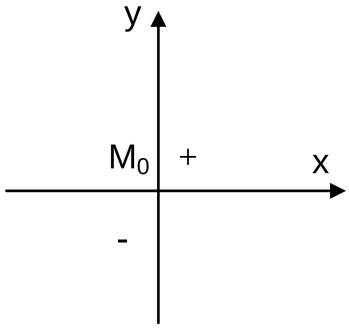
$\Rightarrow$ hàm số không có cực trị tại M_2

3) $Z = x^3 + y^3$

Ta có: $\begin{cases} Z'_x = 3x^2 \\ Z'_y = 3y^2 \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ dừng $M_0(0;0)$

$$Z''_{xx} = 6x,\ Z''_{yy} = 6y,\ Z''_{xy} = 0$$

Tại $M_0(0,0)$, ta có B^2-AC nên chưa kết luận được ngay.



Hình 19

Chú ý rằng $Z(0,0) = 0$ và $Z(x,y) - Z(0,0) = x^3 + y^3$, hiệu này dương nếu điểm $M(x,y)$ nằm ở góc phần tư thứ nhất, âm nếu M nằm ở góc phần tư ba. Do đó dấu của hiệu $Z(x,y) - Z(0,0)$ thay đổi ở lân cận điểm $M_0(0,0)$ nên $M_0(0,0)$ không là điểm cực trị.

1.3.1.3. Cực trị có điều kiện

♦ **Định nghĩa**

Cực trị của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi\left(x,y\right)=0$ được gọi là cực trị có điều kiện.

♦ **Phương pháp thế:**

Giả sử từ điều kiện ràng buộc $\varphi\left(x,y\right)=0$ ta giải ra được y=y(x). Khi đó việc tìm cực trị có điều kiện của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ được quy về việc tìm cực trị tự do (không điều kiện) của hàm $Z=f\left(x,y\left(x\right)\right)$

Tức là, ta giải bài toán tìm cực trị điều kiện bằng cách sử dụng phương pháp cực trị của hàm một biến số.

Ví dụ: Tìm cực trị của $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ với điều kiện x+y -1=0.

Giải

Từ điều kiện ta giải ra y=1-x. Thế vào biểu thức của Z, ta được

$$Z=\sqrt{2}.\sqrt{x-x^2}$$

Đây là hàm một biến của x xác định trên đoạn $\left[0,1\right]$.

Ta có: $\dfrac{dZ}{dx}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\Rightarrow\dfrac{dZ}{dx}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Lập bảng biến thiên:

x	0		1/2		1
$\dfrac{dZ}{dx}$	‖	+	0	-	‖
Z	0	↗	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0

Tại x =1/2 hàm só $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ đạt cực đại và giá trị cực đại là $Z(1/2,1/2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

♦ **Phương pháp nhân tử của Lagrange:**

Giả sử muốn tìm cực trị của hàm $Z=f\left(x,y\right)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi\left(x,y\right)=0$ mà ta gặp phải các trường hợp sau:

i) Từ phương trình $\varphi\left(x,y\right)=0$ không thể giải ra x hoặc y.

ii) Sau khi dùng phép thế thì hàm kết quả Z của một biến không thể dễ dàng lấy đạo hàm.

Để giải quyết vấn đề này người ta dựa vào phương pháp sau gọi là phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị có điều kiện.

*** Bài toán:**

Tìm cực trị của hàm số $Z=f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$.

Lập hàm Lagrange: $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda.\varphi(x,y)$

Định lí 3: (Điều kiện cần)

Giả sử các hàm $Z=f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục ở lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng $\varphi'_x(x_0,y_0)$, $\varphi'_y(x_0,y_0)$ không đồng thời bằng 0.

Khi đó, nếu hàm $Z=f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y)=0$ thì tồn tại một số λ_0 sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

Định lí 4: (Điều kiện đủ)

Giả sử $Z=f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của $M_0(x_0,y_0)$ và (x_0,y_0,λ_0) là điểm dừng của hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)$. Ta có:

- Nếu $d^2F(x_0,y_0,\lambda)=F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda)(dx)^2+2F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda)dxdy+F''_{yy}(x_0,y_0,\lambda)(dy)^2$ xác định dương trong một miền theo dx, dy thỏa mãn điều kiện ràng buộc:

$$d\varphi(x_0,y_0)=\varphi'_x(x_0,y_0)dx+\varphi'_y(x_0,y_0)dy \text{ và } dx^2+dy^2\neq 0$$

thì hàm số $Z=f(x,y)$ đạt cực tiểu tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện là $\varphi(x_0,y_0)=0$.

- Nếu $d^2F(x_0,y_0,\lambda)$ xác định âm trong một miền theo dx, dy thỏa điều kiện ràng buộc như trên thì hàm số $Z=f(x,y)$ đạt cực đại tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện là $\varphi(x_0,y_0)=0$.

- Nếu $d^2F(x_0,y_0,\lambda)$ không xác định dấu trong miền nói trên thì không có cực trị có điều kiện tại $\varphi(x_0,y_0)=0$.

Từ các định lý trên ta có thể tìm cực trị có điều kiện theo phương pháp nhân tử Lagrange như sau:

Bước 1: Lập hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ($\lambda\in\mathbb{R}$)

Bước 2: Tính

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y) \\ F'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y) \end{cases}$$

Và giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng (x_0,y_0) và giá trị λ_0 tương ứng.

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0 \\ \varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases} \Rightarrow M_1(x_1,y_1),\ \lambda_1;\ M_2(x_2,y_2),\ \lambda_2,...$$

Bước 3: Tính vi phân cấp 2 của $F(x,y,\lambda)$

$$d^2F(x,y,\lambda)=F''_{xx}(x,y,\lambda)(dx)^2+2F''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy+F''_{yy}(x,y,\lambda)(dy)^2$$

và tính ràng buộc $d\varphi(x,y)=\varphi'_x(x,y)dx+\varphi'_y(x,y)dy$

Với mỗi điểm dừng $M_1(x_1,y_1)$ và λ_1, xét $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)$:

i) Nếu $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)>0$ với $dx^2+dy^2\neq 0$ thì hàm số $Z=f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ đạt cực tiểu tại $M_1(x_1,y_1)$.

ii) Nếu $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)<0$ thì hàm số $Z=f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ đạt giá trị cực đại tại điểm $M_1(x_1,y_1)$.

iii) Nếu dấu của $d^2F(x_1,y_1,\lambda_1)$ không xác định xét theo $dx^2+dy^2\neq 0$ thì hàm số $Z=f(x,y)$ không đạt cực trị tại $M_1(x_1,y_1)$

Tương tự cho các điểm còn lại.

♦ **Ví dụ:**

1) Sử dụng phương pháp Lagrange để tìm cực trị của hàm số $Z=3x-y$ với điều kiện $3x^2+4y^2=208$.

Giải

Bước 1. Lập hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)=3x-y+\lambda.[3x^2+4y^2-208]$.

Bước 2. Ta có:

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=0 \\ F'_y(x,y,\lambda)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+6\lambda x=0 \\ -1+8\lambda y=0 \\ 3x^2+4y^2=208 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm dừng $M_1(8,-2)$ ứng với $\lambda_1=\frac{-1}{16}$; $M_2(-8,2)$ ứng với $\lambda_2=\frac{1}{16}$.

Bước 3. Ta có:

$F''_{xx}(x,y,\lambda)=-6\lambda$; $F''_{xy}(x,y,\lambda)=F''_{yx}(x,y,\lambda)=0$; $F''_{yy}(x,y,\lambda)=-8\lambda$

$\Rightarrow d^2F(x,y,\lambda)=-6\lambda(dx)^2-8\lambda(dy)^2$

$\varphi'_x(x,y)=6x;\ \varphi'_y(x,y)=8y \Rightarrow d\varphi(x,y)=6xdx+8ydy$

Tại $M_1(8,-2)$ ứng với $\lambda_1=\dfrac{-1}{16}$, ta có: $d^2F(x,y,\lambda)=\dfrac{3}{8}(dx)^2+\dfrac{1}{2}(dy)^2>0$

Suy ra $M_1(8,-2)$ là điểm cực tiểu, Z_{CT}=26.

Tại $M_2(-8,2)$ ứng với $\lambda_1=\dfrac{1}{16}$, ta có:

$$d^2F(x,y,\lambda)=-\left(\frac{3}{8}(dx)^2+\frac{1}{2}(dy)^2\right)<0$$

Suy ra $M_2(-8,2)$ là điểm cực đại, $Z_{CĐ}$=-26.

2) Sử dụng phương pháp Lagrange để tìm cực trị của hàm số $Z=6-4x-3y$ với điều kiện $x^2+y^2=1$.

Giải

Bước 1. Lập hàm Lagrange $F(x,y,\lambda)=6-4x-3y+\lambda.\left[x^2+y^2-1\right]$.

Bước 2. Ta có:

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=0 \\ F'_y(x,y,\lambda)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+2\lambda x=0 \\ -3+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm dừng $M_1\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_1=\dfrac{5}{2}$; $M_2\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_2=-\dfrac{5}{2}$.

Bước 3. Ta có:

$F''_{xx}(x,y,\lambda)=2\lambda;\ F''_{xy}(x,y,\lambda)=F''_{yx}(x,y,\lambda)=0; F''_{yy}(x,y,\lambda)=2\lambda$

$$\Rightarrow d^2F(x,y,\lambda)=2\lambda\left((dx)^2+(dy)^2\right)$$

$\varphi'_x(x,y)=2x;\ \varphi'_y(x,y)=2y \Rightarrow d\varphi(x,y)=2xdx+2ydy$

Tại $M_1\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_1=\dfrac{5}{2}$, ta có: $d^2F(x,y,\lambda)=5\left((dx)^2+(dy)^2\right)>0$

Suy ra $M_1\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ là điểm cực tiểu, Z_{CT}=1.

Tại $M_2\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ ứng với $\lambda_2=-\dfrac{5}{2}$, ta có:

$$d^2F(x,y,\lambda)=-5\left((dx)^2+(dy)^2\right)<0$$

Suy ra $M_2(-8,2)$ là điểm cực đại, $Z_{CĐ}=11$.

1.3.2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền đóng

Cực trị mà chúng ta định nghĩa ở mục trước chỉ có tính chất địa phương. Chúng lớn hơn hay bé hơn những giá trị khác của hàm số ở lân cận điểm cực trị. Người ta thường gọi đó là những cực trị địa phương. Bây giờ ta muốn tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trong toàn bộ miền nào đó.

Ta biết rằng hàm số Z=f(x,y) liên tục trên miền đóng D thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền D. Nếu các giá trị ấy đạt được tại những điểm bên trong miền D thì những điểm ấy phải là điểm cực trị, do đó là điểm dừng của hàm số. Nhưng các giá trị ấy cũng có thể đạt được trên biên của miền D. Do đó muốn tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số Z=f(x,y) trong miền đóng D, ta thực hiện các bước sau:

i) Tính giá trị của $Z=f(x,y)$ tại các điểm dừng nằm trong miền D.

ii) Tính giá trị của Z tại các điểm trên biên của miền D.

iii) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các giá trị tính ở i) và ii) là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất phải tìm.

♦ **Ví dụ**: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$Z=x^2+y^2-xy+x+y$$

Trên miền D giới hạn bởi $x \le 0, y \le 0, x+y \ge -3$

Giải

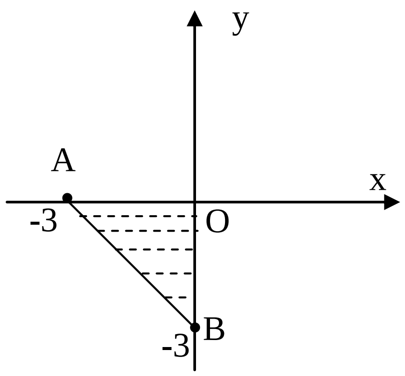
· Tìm các điểm dừng của hàm số $Z=x^2+y^2-xy+x+y$ trong miền D.

Ta có:

$$\begin{cases} Z'_x=2x-y+1 \\ Z'_y=2y-x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z'_x=0 \\ Z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y-x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_0(-1,-1) \in D$ và $Z(M_0)=-1$.



Hình 20

· Biên của D gồm 3 đoạn thẳng OA, OB, AB.

Trên OA, ta có -3<x<0, y=0, $Z=x^2+x$

$$Z'_x=2x+1, Z'_x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow M_1(-1/2,0),\ Z\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

Tương tự, trên OB ta có $M_2\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ và $Z\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$.

Trên AB, ta có $M_3\left(-\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right)$ và $Z\left(\frac{-3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$.

Tại các điểm O, A, B, ta có: $Z(0,0)=0$; $Z(-3,0)=6$; $Z(0,-3)=6$.

So sánh các giá trị của Z, suy ra maxZ=6 tại $(-3,0)$ và $(0,-3)$; minZ=-1 tại $M_0(-1,-1)$.

BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 1

-----

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z = \ln x + \ln \sin y$

b) $z=\sqrt{y-x}\ln(y+x)$

c) $z=\dfrac{x}{\cos^2 y}$

2. Cho hàm số $z=f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$. Tính $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$, $f(-x,-y)$.

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{xy}{x^4+y^4}$

4. Tìm giới hạn khi $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y)=\dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$;

c) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

5. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn tại $M_0(x_0,y_0)$

$$f(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{x^3+y^3}.$$

6. Khảo xác tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{khi}\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi}\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{khi}\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi}\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

6. Tính đạo hàm riêng theo định nghĩa của các hàm số sau:

a) $Z=f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ tại (0,0).

b) $Z=f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ tại (0,0).

7. Tính đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$

c) $f(x,y)=\text{artan}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ d) $f(x,y)=\ln\left(xy^2+yx^2+\sqrt{1+\left(xy^2+yx^2\right)^2}\right)$

e) $f(x,y)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$ f) $f(x,y)=e^{xy}\text{cosxsiny}$

g) $f(x,y,z)=e^{xyz}\sin\dfrac{y}{z}$ h) $f(x,y,z)=x^{y^z}\ (x>0,y>0)$

i) $f(x,y,z)=e^{\frac{1}{x+y+z}}$ j) $f(x,y,z)=z\sin\dfrac{y}{x+z}$

8. Tính đạo hàm hợp của các hàm số sau:

a) $Z=e^{u^2-2v^2}$ với $u=\cos x,\ v=\sqrt{x^2+y^2}$.

b) $Z=\ln\left(u^2+v^2\right)$ với $u=xy,\ v=\dfrac{x}{y}$.

c) $Z=xe^{\frac{x}{y}}$ với $x=\cos t,\ y=e^{2t}$.

d) $Z=x\sqrt{1+y^2}$ với $x=te^{2t},\ y=e^{-t}$.

9. Tính $\dfrac{dZ}{dx}$ của các hàm số sau:

a) $Z=u^3+v^3$ với $u=x^2,\ v=1-e^x$.

b) $Z=u\sqrt{1+v^2}$ với $u=xe^x,\ v=\cos x$.

c) $Z=\ln\left(u+v^2\right)$ với $u=\sqrt{1+x},\ v=1+\sqrt{x}$.

9. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a) $Z=e^{x}\left(\cos y+x\sin y\right)$ b) $Z=\ln\tan\frac{y}{x}$

c) $Z=\sin\left(x^2+y^2\right)$ d) $u=xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}$.

10. Dùng vi phân tính gần đúng các biểu thức sau:

a) $\left(\sqrt{99}-\sqrt[3]{124}\right)^3$ b) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$

c) $\frac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98}.\sqrt[4]{1,05}}$.

11. Tính đạo hàm của các hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $3\sin\frac{\sqrt{x}}{y}-2\cos\frac{\sqrt{x}}{y}+1=0$, tính y'

b) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$

c) $x^3+y^3+z^3=3xyz$, tính z'_x, z'_y

d) $xy^2z^3+x^3y^2z=x+y+z$, tính z'_x, z'_y

e) $y^2ze^{x+y}-\sin xyz=0$, tính z'_x, z'_y.

12. Tìm đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=x^2y+x\sqrt{y}$ b) $f\left(x,y\right)=\sin\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)$

c) $f\left(x,y\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$ d) $f\left(x,y\right)=x\ln\left(x+y\right)$

e) $f\left(x,y\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ f) $f\left(x,y\right)=x^{\ln y}$

13. Tìm vi phân cấp hai của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=\ln\left(x-y\right)$ b) $f\left(x,y\right)=x^{y}$

c) $f\left(x,y\right)=\left(x+y\right)e^{x+y}$ d) $f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$.

14. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=x^2+y^2+xy-3x-6y$ b) $f\left(x,y\right)=x^3+3xy^2-30x-18y$

c) $f\left(x,y\right)=x^2+y^2+xy-2x-y$ d) $f\left(x,y\right)=4\left(x-y\right)-x^2-y^2$

e) $f\left(x,y\right)=x+y-xe^{y}$ f) $f\left(x,y\right)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

g) $f\left(x,y\right)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$

15. Tìm cực trị của các hàm số

a) $f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ với điều kiện x+y-1=0.

c) $f\left(x,y\right)=6-4x-3y$ với điều kiện $x^2+y^2=1$.

d) $f\left(x,y\right)=2x^2+12xy+y^2$ với điều kiện $x^2+4y^2=25$.

e) $f\left(x,y\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

16. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

a) $f\left(x,y\right)=x^2-y^2$ trong miền D xác định bởi $x^2+y^2\le 4$

b) $f\left(x,y\right)=x^2y\left(4-x-y\right)$ trong miền đóng D giới hạn bởi các đường thẳng x=0, y=0, x+y=6.

c) $f\left(x,y\right)=2x^2+2y^2-\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2$ trong miền tam giác OAB với A(1,0), B(0,1).

d) $f\left(x,y\right)=xy$ trong hình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

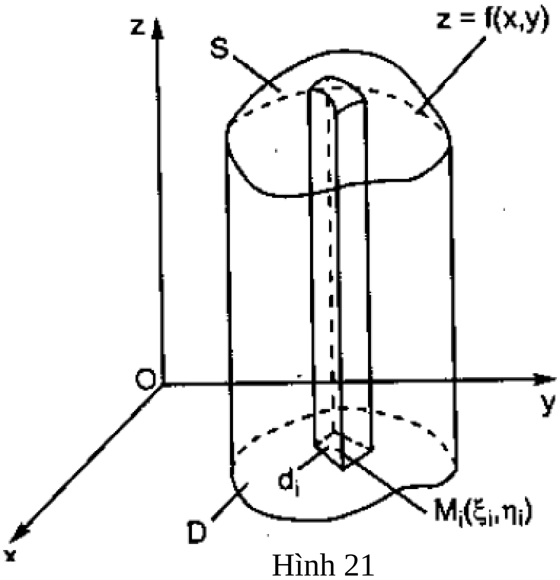
CHƯƠNG 2
TÍCH PHÂN BỘI

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:
- Tính tích phân hai lớp, ba lớp.
- Giải một số bài toán ứng dụng của tích phân hai lớp, ba lớp.

2.1. TÍCH PHÂN HAI LỚP
2.1.1. Khái niệm
2.1.1.1. Bài toán dẫn đến tích phân hai lớp

Giả sử cần tính thể tích V của vật thể hình trụ cong, đáy dưới là miền hữu hạn D (đóng) trong mặt phẳng Oxy, đáy trên là mặt cong S, có phương trình $Z=f\left(x,y\right)$ và các đường sinh song song trục Oz. Hàm $Z=f\left(x,y\right)$ xác định, liên tục và không âm trong miền D.

Chia miền D một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ, d_1, d_2,…,d_n, có các diện tích là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ và qua biên của các miền nhỏ ấy dựng các mặt trụ đường sinh song song với Oz. Như vậy, hình trụ cong đã cho được chia thành n hình trụ cong nhỏ. Để tính thể tích hình trụ cong nhỏ thứ i, lấy trong miền nhỏ d_i một điểm tuỳ ý $M_i\left(\xi_i,\eta_i\right)$. Theo giả thiết, hàm số $Z=f\left(x,y\right)$ liên tục trong miền D, nên trên miền nhỏ d_i, giá trị của nó khác $f\left(M_i\right)$ rất ít. Vậy thể tích hình trụ cong nhỏ thứ i có thể xem gần đúng bằng thể tích hình trụ thẳng, có diện tích đáy là ΔS_i, chiều cao là $f\left(M_i\right)$ và thể tích V của vật thể hình trụ cong đã cho gần đúng bằng:



Hình 21

$$V_n = f\left(M_1\right)\Delta S_1 + f\left(M_2\right)\Delta S_2 + ... + f\left(M_n\right)\Delta S_n$$

Hay $V_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i$.

Gọi λ_i là đường kính của miền d_i (theo nghĩa là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì trên biên của d_i). Dễ thấy rằng khi tăng số phần chia n lên sao cho các mảnh nhỏ d_i có đường kính λ_i nhỏ lại thì sự khác nhau giữa V và V_n càng ít. Do đó, hiển nhiên thể tích V của vật thể hình trụ cong đã cho xem là giới hạn của V_n khi $n \to +\infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính λ_i của các miền nhỏ d_i tiến đến không (thường kí hiệu là max λ_i). Vậy:

$$V = \lim_{\substack{max\lambda_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} V_n = \lim_{\substack{max\lambda_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

2.1.1.2. Định nghĩa tích phân hai lớp

Cho hàm hai biến số $Z=f(x,y)$ xác định trong miền hữu hạn D, nằm trong mặt phẳng Oxy. Thực hiện các bước sau:

i) Chia miền D thành n miền nhỏ d_1, d_2,…,d_2 có các diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$.

ii) Trong mỗi miền nhỏ d_i lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i)$ và tính $f(M_i)\Delta S_i$, i=1,2,…,n.

iii) Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

Tổng I_n gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x,y)$ trong miền D.

Tìm giới hạn của I_n khi $n \to \infty$ sao cho $\max \lambda_i \to 0$. Nếu tổng I_n tiến đến một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm M_i trong miền nhỏ d_i, thì giới hạn I được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x,y)$ trong miền D, kí hiệu là $\iint_D f(x,y)dS$. Vậy

$$\iint_D f(x,y)dS = \lim_{\substack{max\lambda_i \to 0 \\ (n\to+\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

$f(x,y)$ gọi là hàm số dưới dấu tích phân, dS gọi là yếu tố diện tích, D gọi là miền lấy tích phân, x và y gọi là các biến số tích phân.

Nếu $\iint_D f(x,y)dS$ tồn tại thì ta nói rằng hàm số $f(x,y)$ khả tích trong miền D.

*** Chú ý:**

i) Vì giá trị của tích phân 2 lớp nếu tồn tại sẽ không phụ thuộc vào cách chia miền D nên ta có thể chọn cách chia miền D bởi các đường thẳng song song với các trục toạ độ. Khi đó các d_i (trừ một số không đáng kể các d_i giao với biên) là hình chữ nhật có các cạnh Δx, Δy nên ta có dS=dxdy. Vì vậy tích phân hai lớp thường được kí hiệu dưới dạng $\iint_D f(x,y)dxdy$.

ii) Dựa vào định nghĩa của tích phân hai lớp thì thể tích của vật thể hình trụ đã nói ở trên là

$$\boxed{V = \iint_D f(x,y)\,dxdy}$$

2.1.1.3. Sự tồn tại tích phân hai lớp:

Định lí 1. Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D thì nó khả tích trên miền D.

2.1.2. Các tính chất của tích phân hai lớp

Dựa vào định nghĩa ta thấy tích phân hai lớp có các tính chất tương tự như tích phân xác định.

i) $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$

ii) $\iint_D cf(x,y)\,dxdy = c\iint_D f(x,y)\,dxdy$ (c là hằng số)

iii) Nếu D được chia thành D_1 và D_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

iv) $\iint_D dxdy = S(D)$ (S(D) - diện tích của miền D)

v) Nếu $g(x,y) \le f(x,y),\ \forall (x,y) \in D$ thì $\iint_D g(x,y)\,dxdy \le \iint_D f(x,y)\,dxdy$

Đặc biệt, nếu $f(x,y) \ge 0,\ \forall (x,y) \in D$ thì $\iint_D f(x,y)\,dxdy \ge 0$.

vi) Nếu m và M là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y)$ trên miền D thì ta có

$$m.S(D) \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le MS(D)$$

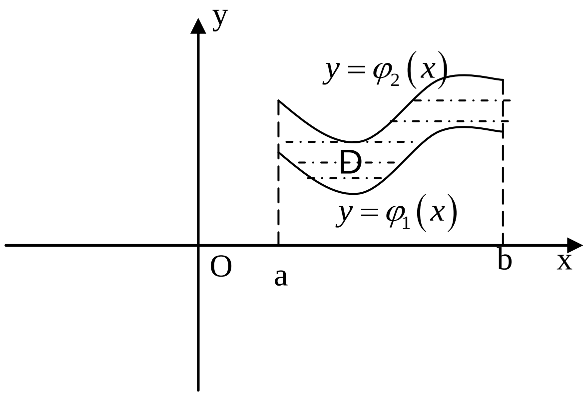
2.1.3. Cách tính tích phân hai lớp

Ta sẽ xây dựng cách tính tích phân hai lớp dựa vào bài toán tính thể tích của vật thể trụ.

Giả sử cần tính tích phân:

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

với D là miền hữu hạn và $f(x,y)$ liên tục trên D.



Hình 22

2.1.3.1. Trường hợp D là hình thang cong loại 1:

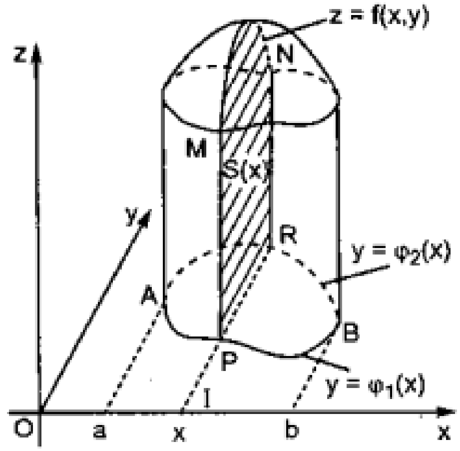
D được gọi là hình thang cong loại 1 nếu D là miền phẳng giới hạn bởi các đường x=a, x=b, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$

($a<b$, $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$)

Với $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ là các hàm liên tục và đơn trị trong $[a,b]$.

i) Xét $f(x,y)\ge 0,\ \forall(x,y)\in D$

Ta thấy tích phân hai lớp $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ biểu diễn thể tích của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt trụ có đường sinh song song trục Oz, đáy là miền D và giới hạn phía trên bởi mặt cong $Z=f(x,y)$.



Hình 23

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x\in[a,b]$ thiết diện thu được có diện tích là $S(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Khi đó thể tích của vật thể là

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Nếu kí hiệu

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Thì

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

ii) Nếu $f(x,y)\le 0,\ \forall(x,y)\in D$ thì công thức trên được kiểm tra vẫn còn đúng. Vì vậy, ta có:

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

♦**Ví dụ:**

1) Xác định các cận tích phân trong tích phân kép $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=2x^2$ và $y=2$.

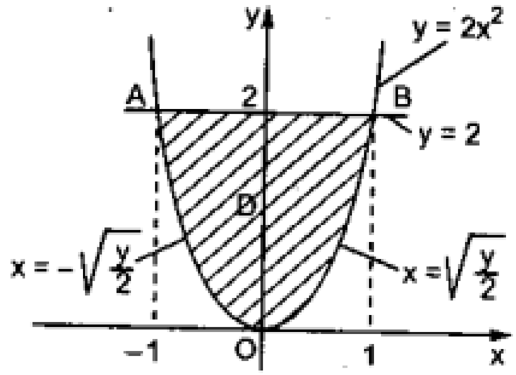
2) Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^2ydxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=\sqrt{2-x^2}$.

Giải

1) Hoành độ giao điểm A và B được xác định bởi phương trình

$2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_A = -1,\ x_B = 1.$

Ta thấy rằng đường cong AOB giới hạn phía dưới của miền D có phương trình $y=2x^2$, đường thẳng AB giới hạn phía trên của miền D có phương trình y=2; còn x biến thiên từ $x_A = -1 \to x_B = 1$ nghĩa là có thể biểu diễn miền D bởi bất đẳng thức kép: $\{-1 \le x \le 1;\ 2x^2 \le y \le 2\}$



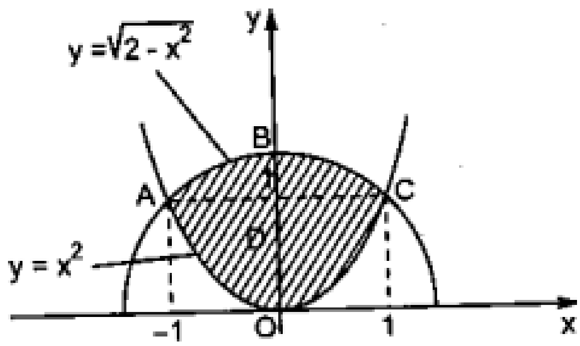
Hình 24

Do đó

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} f(x,y)\,dy.$$

2) Nhìn theo hướng dương của trục Oy, có thể biểu diễn miền D như sau:

$$D=\left\{-1 \le x \le 1;\ x^2 \le y \le \sqrt{2-x^2}\right\}$$



Hình 25

Do đó $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy = \int_{-1}^{1} x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(2x^2 - x^4 - x^6\right)dx$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 - x^4 - x^6\right)dx = \frac{34}{105}.$$

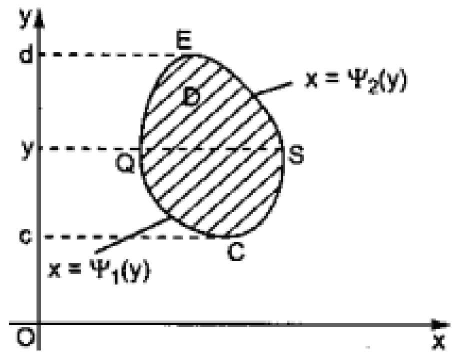
2.1.3.2. Trường hợp D là hình thang cong loại 2:

D được gọi là hình thang cong loại 2 nếu D là miền phẳng giới hạn bởi các đường y=c, y=d, $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ (c<d và $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$).

Với $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ là các hàm liên tục và đơn trị trong $[c,d]$.

Tương tự trường hợp trên, ta có:

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$



Hình 26

♦ **Ví dụ:**

1) Xác định các cận tích phân trong tích phân kép $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=0$, $y=x^2$ và $x+y=2$.

2) Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, D là miền giới hạn bởi:

a) Các đường x=0, x=3, y=0 và y=2.

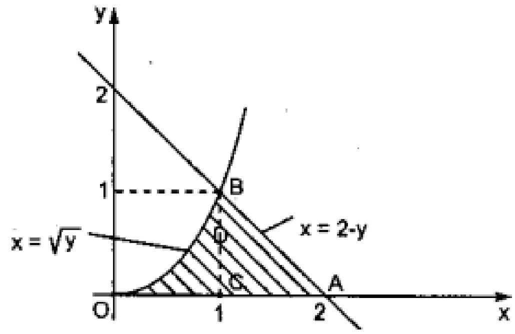
b) Các đường y=-x, $x=\sqrt{y}$ và y=2.

Giải

1) Nhìn theo hướng dương của trục Ox có thể biểu diễn miền D bởi các tích phân kép

$\{0\le y\le 1;\ \sqrt{y}\le x\le 2-y\}$

Vậy $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$.

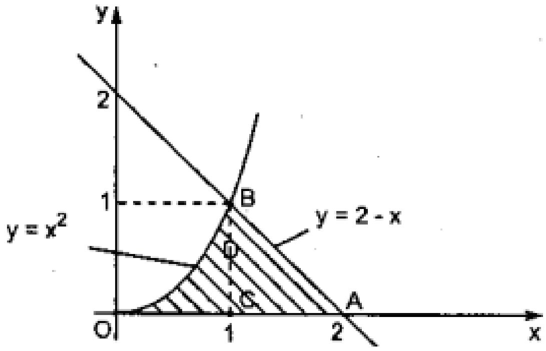


Hình 27

***Chú ý:** Nếu tính tích phân theo y trước thì ta làm như sau:

Hoành độ của giao điểm B được xác định bởi phương trình $x^2+x-2=0 \Rightarrow x_B=1$, $y_B=1$

Nhìn theo hướng của trục Oy, thấy rằng đường cong OBA giới hạn phía trên của miền D gồm hai đoạn OB và BA có phương trình khác nhau, nên phải chia miền D thành hai miền OCB



Hình 28

và CAB. Ta có:

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{OCB} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{CAB} f(x,y)dxdy$ Miền OCB có biểu diễn bởi các bất đẳng thức kép $\{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x^2\}$

Miền CAB có biểu diễn bởi các bất đẳng thức kép

$$\{1 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2 - x\}$$

Do đó $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$

Qua trường hợp này, ta thấy rõ tầm quan trọng của việc phải căn cứ vào hình dạng của miền D mà quyết định sử dụng công thức để tính tích phân một cách đơn giản nhất.

2.a) Nhìn theo hướng dương của trục Ox, có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép:

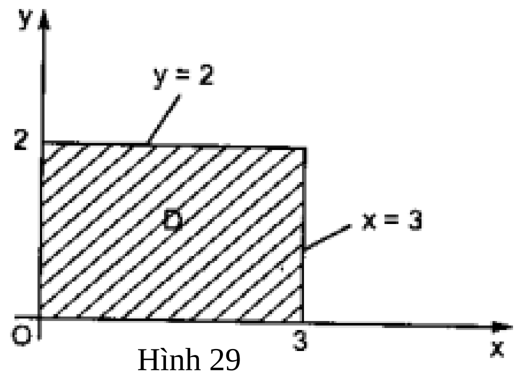
D=$\{(x, y): 0 \le y \le 2, 0 \le x \le 3\}$

Vậy $\iint\limits_D x^2ydxdy = \int_0^2 dy\int_0^3 x^2ydx$

Tính tích phân theo x, xem y là hằng số, ta có

$$\int_0^3 x^2ydx = y\int_0^3 x^2dx = y\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9y.$$

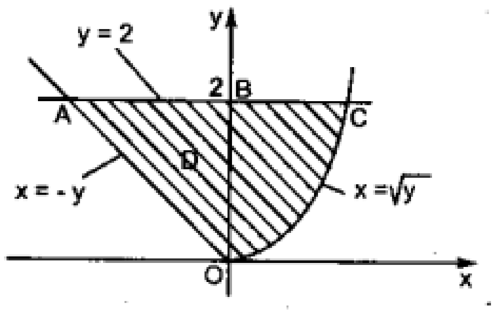
Và $\iint\limits_D x^2ydxdy = \int_0^2 9ydy = 18.$



Hình 29

2. b) Tính tích phân theo x trước.

Nhìn theo hướng dương của trục Ox, có thể biểu diễn miền D bởi bất đẳng thức kép: $\{0 \le y \le 2;\ -y \le x \le \sqrt{y}\}$



Hình 30

Do đó $\iint\limits_D x^2ydxdy = \int_0^2 dy\int_{-y}^{\sqrt{y}} x^2ydx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \left(y^{5/2} + y^4\right)dy = \frac{16}{105}\left(5\sqrt{2} + 14\right).$$

2.1.3.3. Trường hợp D là hình thang cong bất kì:

Nếu D là miền bât kì thì ta chia D thành một số hữu hạn miền phẳng không dẫm lên nhau có dạng hình thang cong loại 1 và loại 2. Khi đó tích phân lấy trên D bằng tổng các tích phân lấy trên các miền đã chia.

♦ **Ví dụ:**

1) Tính tích phân $I=\iint\limits_D (x-y)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y=-1, x=y^2, y=x+1.$

Giải

Nếu xem D là hình thang cong loại 2 thì việc tính tích phân đơn giản hơn, khi xem nó là hình thang cong loại 1. Ta thấy D được giới hạn bởi các điều kiện:

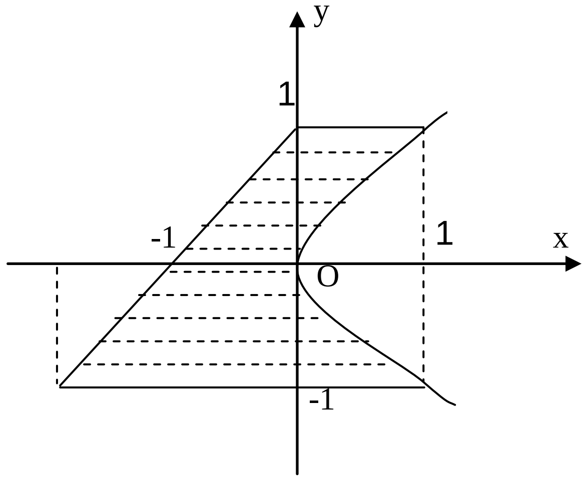
$$-1\le y\le 1,\ y-1\le x\le y^2$$

Do đó

$$I=\iint\limits_D (x-y)dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{y-1}^{y^2}(x-y)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{y-1}^{y^2}dy$$

$$=\left(\frac{y^5}{10}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{6}-\frac{y}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{7}{15}.$$



Hình 31

2) Đổi thứ tự tích phân trong các tích phân

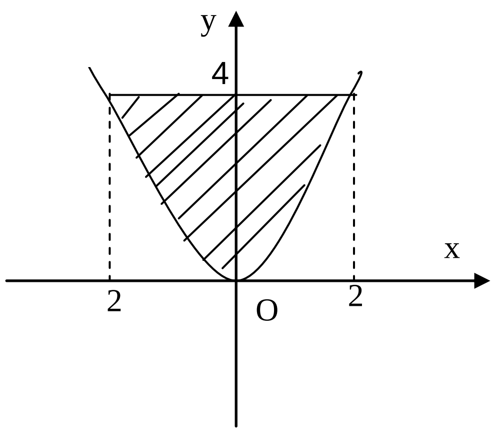
a) $\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy$

b) $\int_{0}^{1}dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

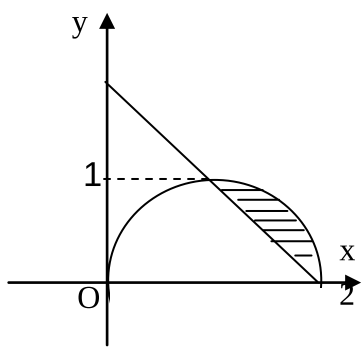
Giải

a) Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường $x=-2,\ x=2, y=x^2,\ y=4$.

Hai đường thẳng $y=x^2,\ y=4$ cát nhau tại hai điểm x=-2 và x=2. Do đó, nếu đổi thứ tự lấy tích phân, ta được:



Hình 32



Hình 33

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy=\int_{0}^{4}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$$

b) Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường $x=2-y$, $x=1+\sqrt{1-y^2}$.

Đường thẳng $x=2-y$ và đường tròn $x=1+\sqrt{1-y^2}$ cắt nhau tại hai điểm y=0 và y=1. Vậy khi đổi thứ tự tích phân, ta được:

$$\int_{0}^{1}dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx=\int_{1}^{2}dx\int_{2-x}^{1+\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$$

2.1.4. Đổi biến trong tích phân hai lớp

2.1.4.1. Trường hợp tổng quát

***Định nghĩa:** Giả sử x, y được biểu diễn như là hàm hai biến của u, v bởi phương trình:

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$$

Xem các phương trình trên như là định nghĩa của một phép biến đổi (ánh xạ 1-1) từ điểm (u,v) trong mặt phẳng uv đến điểm (x,y) trong mặt phẳng xy. Ta nói phép biến đổi trên là phép biến đổi 1-1 từ tập S trong mặt phẳng uv đến tập D trong mặt phẳng xy nếu:

i) Mỗi điểm trong S có ảnh là một điểm trong D.

ii) Mỗi điểm trong D có ảnh là một điểm trong S.

iii) Các điểm khác nhau trong S có ảnh khác nhau trong D.

***Chú ý:** Nếu $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ là phép biến đổi 1-1 thì từ $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ ta có thể giải ra được u,v là hàm của x, y và phép biến đổi ngược:

$$\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$$

cũng là phép biến đổi 1-1 từ D đến S.

♦**Định lí 1.** Giả sử ta có phép biến đổi

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$$

trong đó

i) $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ là phép biến đổi 1-1 từ miền S trong mặt phẳng uv vào miền D trong mặt phẳng xy.

ii) Các hàm $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng trên S.

iii) Định thức hàm Jacobian

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,\ \forall(u,v)\in S$$

Khi đó ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_S f\left[x(u,v),y(u,v)\right]|J|dudv.$$

♦**Ví dụ:** Tính $\iint_D (x-y)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường:

$$y=x-3,\ y=x+1,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3},\ y=-\frac{1}{3}x+5.$$

Giải

Ta gặp khó khăn khi tính trực tiếp tích phân này. Tuy nhiên dùng phép đổi biến thì việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

Đặt $u=y-x,\ v=y+\frac{1}{3}x$ thì các đường thẳng $y=x-3,\ y=x+1,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3},\ y=-\frac{1}{3}x+5$ sẽ được biến thành các đường thẳng tương ứng u=-3, u=1, v=7/3, v=5 trong mặt phẳng uv.

Ta có

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v,\ y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v.$$

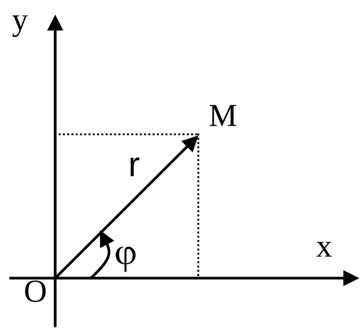
$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=-\frac{3}{4}.$$

Do đó $I=\iint_D\left(-\frac{3}{4}u\right)dudv=\int_{\frac{7}{3}}^{5}dv\int_{-3}^{1}\left(-\frac{3}{4}u\right)du=8$

2.1.4.2. Đổi biến trong tọa độ cực

Ta có công thức liên hệ giữa toạ độ Descartes (x,y) và toạ độ cực (r,φ) của cùng một điểm:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$$



Hình 34

Nếu $r\geq 0$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$ (hoặc $-\pi\leq\varphi\leq\pi$) thì công thức trên xác định một phép biến đổi 1-1 giữa toạ độ Descartes (x,y) và toạ độ cực (r,φ). Với phép biến đổi này thì đường thẳng r=a (a là hằng số) trong mặt phẳng cực tương ứng với đường tròn tâm O bán kính a trong mặt phẳng Oxy, còn đường thẳng $\varphi=\alpha$ (α là hằng số) trong mặt phẳng cực ứng với tia xuất phát từ gốc O và tạo với trục Ox một góc α trong mặt phẳng Oxy.

Ta có định thức Jacobian

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

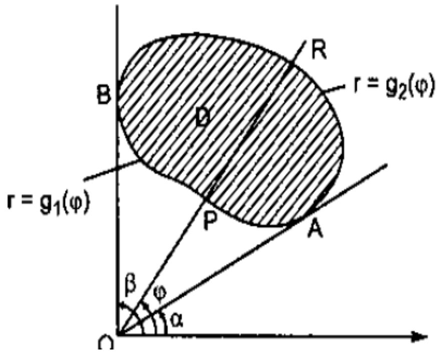
Do đó $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_S f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)|J|\,drd\varphi$

trong đó S là miền của (r,φ) có ảnh D qua phép biến đổi.

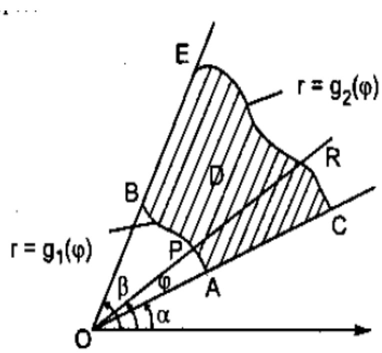
Để thấy rõ cách xác định cận lấy tích phân, ta phân biệt ba trường hợp sau:

♦ **Trường hợp gốc cực O nằm ngoài miền D:**

Giả sử miền D nằm giữa các tia $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta$, mọi tia xuất phát từ gốc cực O cắt biên của D



Hình 35



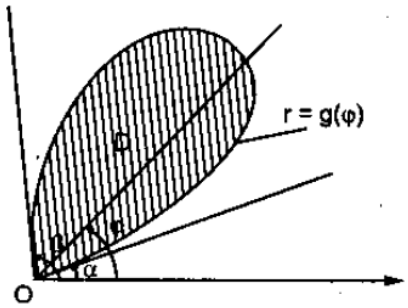
Hình 36

không quá hai điểm và $r=g_1(\varphi)$, $r=g_2(\varphi)$ lần lượt là phương trình trong hệ toạ độ cực của các đường cong APB và ARB (hoặc CRE) (nếu nhìn từ gốc cực O về phía D thì APB là đoạn đường cong giới hạn phía dưới miền D), còn ARB (hoặc CRE) là đoạn đường cong giới hạn phía trên miền D). Khi đó, lấy tích phân theo r trước (xem φ là hằng số) sau đó lấy tích phân theo φ, ta có

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)|J|\,drd\varphi=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,rdr$$

♦ **Trường hợp gốc cực O nằm trên biên của miền D:**

Giả sử mọi tia xuất phát từ gốc cực O cắt biên của miền D không quá một điểm (không kể điểm O) và phương trình của biên đó trong hệ toạ độ cực là $r=g(\varphi)$ với $\alpha\le\varphi\le\beta$. Khi đó, lấy tích phân theo r trước (xem φ là hằng số), sau đó lấy tích phân theo φ, ta có:

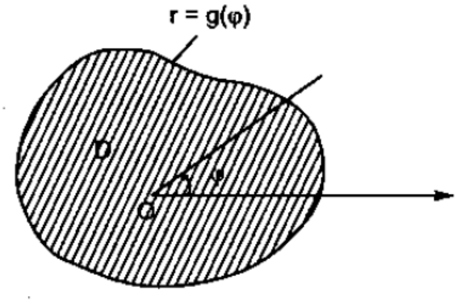


Hình 37

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)|J|\,drd\varphi=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,rdr$$

♦ **Trường hợp gốc cực O nằm trong miền D:**

Giả sử mọi tia xuất phát từ gốc cực O cắt biên của miền D tại một điểm phương trình của biên đó trong hệ toạ độ cực là $r=g(\varphi)$ với $0\le\varphi\le 2\pi$. Khi đó, lấy tích phân theo r trước (xem φ là hằng số), sau đó lấy tích phân theo φ, ta có:



Hình 38

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$$

***Chú ý:** Trong các công thức trên, tích phân theo thứ tự ngược lại, nghĩa là trước hết theo φ (xem r là hằng số), sau đó theo r thường không sử dụng.

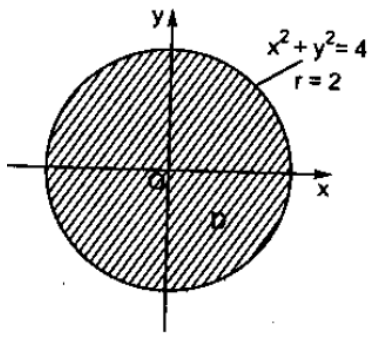
♦**Ví dụ:** Chuyển tích phân kép $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cực, trong đó D là miền giới hạn bởi:

a) Đường tròn $x^2+y^2=4$.

b) Đường tròn $x^2+y^2=2x$.

c) Đường tròn $x^2+y^2=2y$.

d) Các đường thẳng $y=x$, $y=-x$ và các đường tròn $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$.



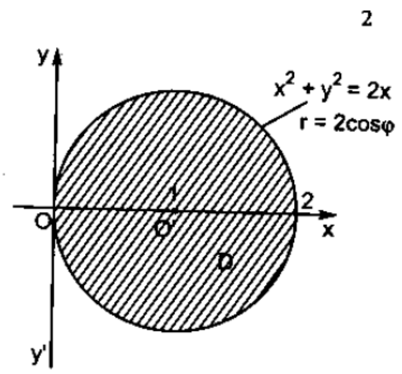
Hình 39

Giải

a) Đổi sang toạ độ cực, phương trình đường tròn $x^2+y^2=4$ có dạng r=2. Vì gốc cực O nằm trong miền D nên ta có:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$$



Hình 40

b) Đổi sang toạ độ cực, phương trình đường tròn $x^2+y^2=2x$ có dạng $r=2\cos\varphi$.

Các tia kẻ từ gốc cực O và tiếp xúc với đường tròn (biên của miền D) trùng với Oy' và Oy do đó $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$. Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D nên ta có:

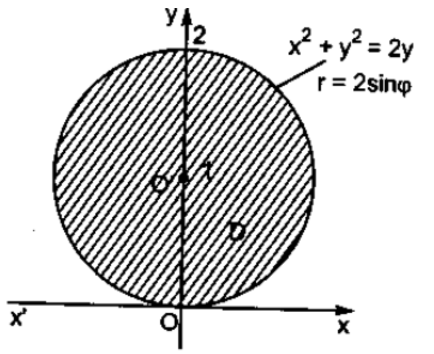
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

c) Đường tròn $x^2+y^2=2y$ có phương trình trong toạ độ cực là $r=2\sin\varphi$.

Các tia kẻ từ gốc cực O và tiếp xúc với đường tròn (biên của miền D) trùng với Ox' và Ox do đó $\alpha=0, \beta=\pi$. Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D nên ta có:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$



Hình 41

d) Đổi sang toạ độ cực, phương trình các đường biên của miền D có dạng:

$x^2+y^2=2x \rightarrow r=2\cos\varphi$

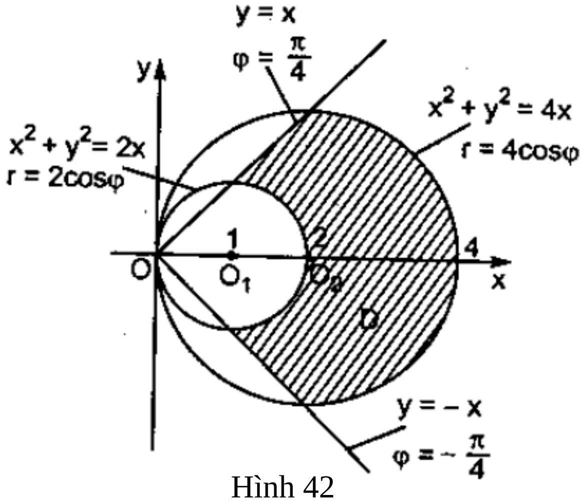
$x^2+y^2=4x \rightarrow r=4\cos\varphi$

$y=-x \rightarrow r\sin\varphi=-\cos\varphi$

$\Leftrightarrow \tan\varphi=-1 \rightarrow \Leftrightarrow \varphi=-\dfrac{\pi}{4}$

$y=x \rightarrow r\sin\varphi=r\cos\varphi$

$\Leftrightarrow \tan\varphi=1 \rightarrow \Leftrightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{4}$



Hình 42

Vì gốc cực O nằm ngoài miền D nên ta có:

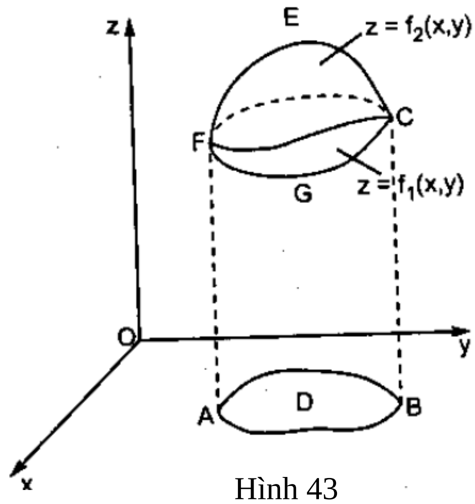
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

2.1.5. Ứng dụng tích phân hai lớp

2.1.5.1. Ứng dụng hình học

♦ **Thể tích của vật thể**

Như đã biết trong mục bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép, thể tích V của một vật thể hình trụ cong có đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, đáy trên là mặt cong S có phương trình $Z=f(x,y)$ và các đường sinh song song với Oz (hàm số $Z=f(x,y)$



Hình 43

giả thiết liên tục và không âm trong miền D) được tính bằng công thức:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Nếu $f(x,y) \le 0$ trong miền D thì $\iint_D f(x,y)dxdy \le 0$, do đó

$$V=-\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Trong trường hợp cần tính thể tích vật thể, giới hạn bởi các mặt cong $Z=f_1(x,y), Z=f_2(x,y)$ và hình chiếu của vật thể đó lên mặt phẳng Oxy là miền D ($f_1(x,y), f_2(x,y)$ liên tục và $f_2(x,y) \ge f_1(x,y)$ trong D) thể tích V phải tìm bằng hiệu số thể tích hai vật thể hình trụ cong ABCEF và ABCGF.

$$V=\iint_D f_2(x,y)dxdy-\iint_D f_1(x,y)dxdy = \iint_D \left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]dxdy.$$

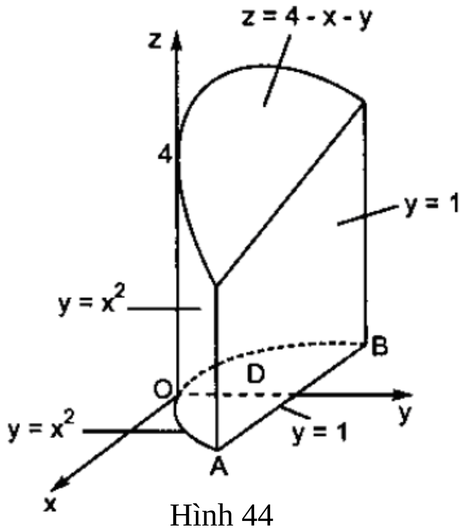
♦**Ví dụ:** Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:

a) $y = x^2, y = 1, x+y+z = 4,\ z = 0$

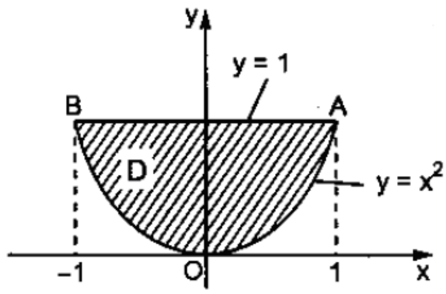
b) $z=4-x^2-y^2,\ z=x^2+y^2$

Giải

a) Vật thể đã cho là một vật thể hình trụ cong, đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi đường parabol $y = x^2, y = 1$, đáy trên là mặt phẳng $x+y+z=4$.



Hình 44



Hình 45

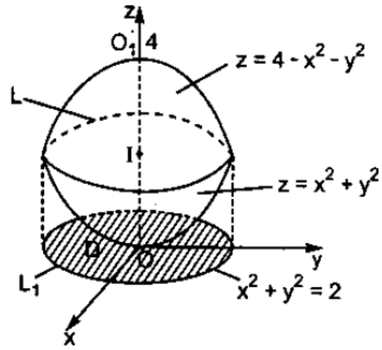
Ta có $V=\iint_D (4-x-y)dxdy = \int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(4-x-y)dy = \int_{-1}^{1}\left(4y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{7}{2}-x-4x^2+x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{68}{15}.$$

b) Vật thể đã cho giới hạn bởi hai mặt parabôlôit tròn xoay có đỉnh tại $O_1(0,0,4), O(0,0,0)$. Đường cong L (giao tuyến của hai mặt parabôlôit) được xác định bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} z=4-x^2-y^2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$

Khử z trong hai phương trình, nhận được: $x^2+y^2=2$. Đây chính là phương trình của đường tròn L_1 giới hạn miền D và là hình chiếu của đường cong giao tuyến L xuống mặt phẳng Oxy.



Hình 46

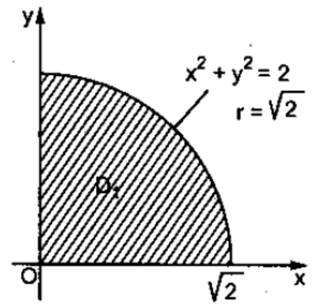
Vì tính chất đối xứng của vật thể đối với các mặt phẳng toạ độ Oxz và Oyz nên chỉ cần tính ¼ thể tích nằm trong góc phần tám thứ nhất. Ta có:

$$\frac{V}{4} = \iint_{D_1} \left(4-x^2-y^2-x^2-y^2\right)dxdy$$

Trong đó D_1 là ¼ mặt tròn $x^2+y^2 \le 2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Để tính tích phân kép được đơn giản, ta chuyển sang toạ độ cực bằng cách thay x, y trong hàm số dưới dấu tích phân bởi $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, còn dxdy thay bằng $rdrd\varphi$. Ta có

$$V = 4.2\iint_{D_1} \left(2-r^2\right)rdrd\varphi$$



Hình 47

Phương trình đường tròn L_1:

$x^2+y^2=2$ khi đó có dạng $r=\sqrt{2}$. Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D_1 nên $V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r-r^3\right)dr = 4\pi$.

♦ **Diện tích hình phẳng:**

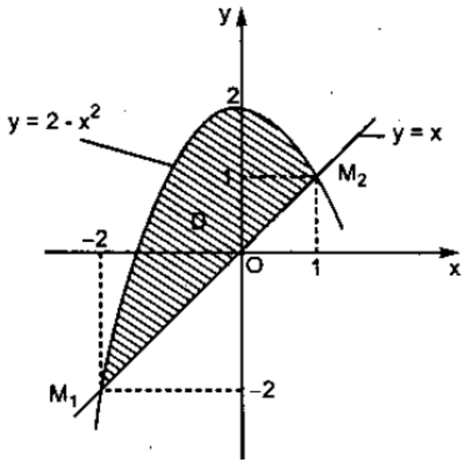
Nếu trong tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$, hàm số dưới dấu tích phân $f(x,y)=1$ với mọi $(x,y)\in D$ thì $\iint_D dxdy$ bằng số đo thể tích hình trụ thẳng có đáy là miền D, đường sinh song song với Oz và chiều cao bằng 1. Do đó $\iint_D dxdy$ cũng bằng số đo diện tích đáy, nghĩa là diện tích miền D. Vậy $S=\iint_D dxdy$

Trong hệ toạ độ cực, diện tích S của hình phẳng D là $S=\iint_D rdrd\varphi$.

♦ **Ví dụ:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = 2 - x^2, y = x$

b) $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, \ y = x, y = 0$



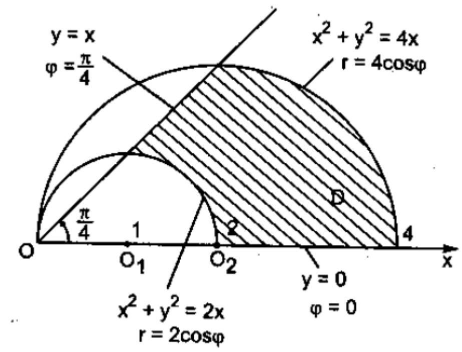
Hình 48

Giải

a) Trước hết, cần tìm toạ độ các giao điểm M_1 và M_2. Ta có:

$$2 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ v } x = -2$$

Khi đó $\displaystyle S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_x^{2-x^2} dy = 9/2$



Hình 49

b) Đổi sang toạ độ cực phương trình các đường biên của D có dạng:

$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow r = 2r\cos\varphi$

$x^2 + y^2 = 4x \rightarrow r = 4r\cos\varphi$

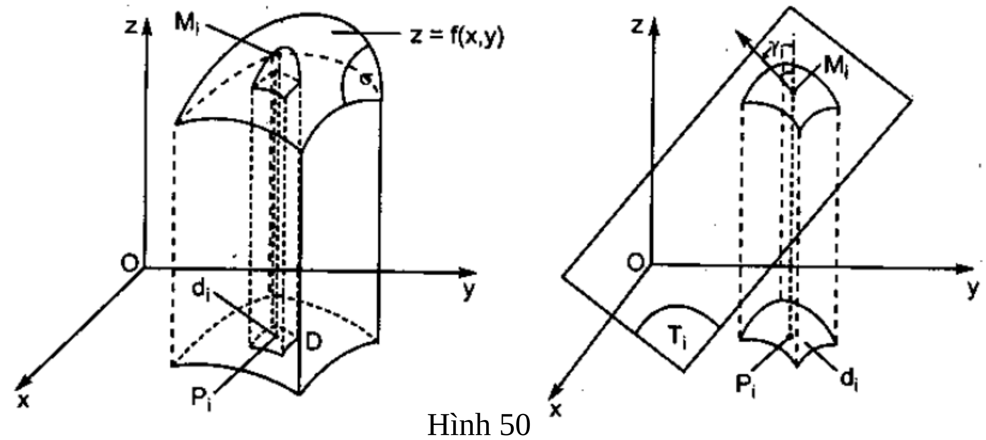
$$y = x \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$y = 0 \rightarrow \varphi = 0.$

$$S = \iint_D r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right).$$

♦ **Diện tích mặt cong:**

Giả sử có mặt cong σ giới hạn bởi một đường cong kín. Phương trình của mặt cong là $z = f(x,y)$, hàm số $f(x,y)$ giả thiết liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D (D là hình chiếu của mặt cong σ trên mặt phẳng Oxy). Chia miền D một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ $d_1, d_2, ..., d_n$, có các diện tích $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. Trong miền nhỏ d_i lấy một điểm tuỳ ý $P_i(\xi_i, \eta_i)$ ứng với điểm $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ trên mặt cong σ. Dựng mặt phẳng T_i tiếp xúc với mặt cong σ tại M_i. Gọi t_i là mảnh của mặt phẳng T_i mà hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy đúng bằng d_i. Diện tích của mảnh t_i kí hiệu ΔT_i. Giới hạn nếu có của $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$ khi $n \to \infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính λ_i của các miền nhỏ d_i tiến đến 0 được gọi là diện tích của mặt cong σ và được tính như sau:



Hình 50

Gọi γ_i là góc giữa mặt phẳng T_i và mặt phẳng Oxy, đó chính là góc giữa trục Oz và pháp tuyến tại M_i với mặt cong đã cho, ta có

$$\Delta\sigma_i = \Delta T_i \cos\gamma_i;\ \Delta T_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}.$$

Các hệ số chỉ phương của pháp tuyến tại M_i với mặt cong đã cho là:

$-p_i = -f'_x(M_i); -q_i = -f'_y(M_i)$ và 1.

Do đó

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}};\ \Delta T_i = \sqrt{1+p_i^2+q_i^2}.\Delta\sigma_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta T_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}.\Delta\sigma_i$$

Diện tích S của mặt cong đã cho là giới hạn của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho $max\lambda_i \to 0$. Giới hạn ấy chắc chắn tồn tại vì các hàm số $p = f'_x(x,y); q = f'_y(x,y)$ liên tục trong miền D. Do đó, theo định nghĩa tích phân kép, ta có:

$$S = = \lim_{\substack{\max\lambda_i \to \infty \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n}\Delta T_i = \lim_{\substack{\max\lambda_i \to \infty \\ (n\to\infty)}} \sum_{\substack{i=1 \\ x\to\infty}}^{n}\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}.\Delta\sigma_i.$$

$$S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

♦**Ví dụ:**

a) Tính diện tích mặt cầu tâm O(0,0,0), bán kính R: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

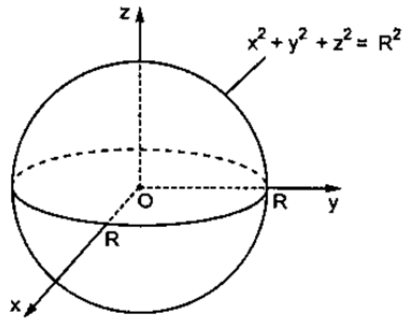
Giải

Vì tính chất đối xứng của mặt cầu đối với gốc O và đối với các mặt phẳng toạ độ nên ta chỉ cần tính diện tích của phần mặt cầu nằm trong góc phần tám thứ nhất. Khi đó:

$Z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $p=Z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $q=Z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$,

$\sqrt{1+p^2+q^2}=\dfrac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ và $S=8\iint\limits_D \dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$

Trong đó D là ¼ mặt tròn $x^2+y^2\le R^2$ nằm trong góc phầ tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.



Hình 51

Chuyển sang toạ độ cực, ta có

$$S=8\iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}dxdy=-8R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R\frac{-rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}=4\pi R^2.$$

2.1.5.2. Ứng dụng cơ học

♦ **Khối lượng của bản phẳng không đồng chất**

Cho một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại điểm (x,y) trong miền D là $\delta=\delta(x,y)$, trong đó $\delta(x,y)$ là hàm liên tục trên D. Ta sẽ đi tìm khối lượng M của bản phẳng này.

Chia miền D thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau có tên và diện tích gọi chung là $\Delta s_1,\Delta s_2,...,\Delta s_n$. Trong mỗi miền nhỏ Δs_i (i=1,2,…,n) lấy tùy ý điểm $M_i(x_i,y_i)$. Vì hàm liên tục trên mỗi miền nhỏ, nên với Δs_i khá bé ta có thể xem khối lượng riêng tại mỗi điểm trên Δs_i là không đổi và bằng $\delta(x_i,y_i)$.

Khối lượng của bản phẳng xấp xỉ với tổng $M_n=\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\Delta s_i$.

Cho $n\to\infty$ sao cho đường kính lớn nhất của các miền nhỏ Δs_i dần về 0 thì khối lượng của bản phẳng là $M=\lim\limits_{\max d(\Delta s_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,y_i)\Delta s_i$.

Theo định nghĩa tích phân hai lớp thì ta có khối lượng của bảng phẳng là

$$M=\iint\limits_D \delta(x,y)dxdy$$

Ví dụ:

Tìm khối lượng của bản phẳng tròn bán kính R, biết khối lượng riêng δ của bản tại mỗi điểm M của nó tỉ lệ với khoảng cách từ M đến tâm của bản.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc O trùng với tâm của bản.

Gọi λ là hệ số tỉ lệ thì $\delta(x,y)=\lambda\sqrt{x^2+y^2}$ ta có khối lượng của bản là

$$M=\iint_D \lambda\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực thì $M=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \lambda\sqrt{r^2}\,r dr = 2\lambda\pi.\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\lambda\pi R^3$.

♦ **Moment quán tính của bản phẳng**

Ta đã biết moment quán tính của một chất điểm khối lượng m đặt tại điểm M(x,y) đối với trục Ox, Oy và gốc O tương ứng là

$$I_x = my^2; I_y = mx^2; I_O = m\left(x^2+y^2\right)$$

Bây giờ xét một bảng phẳng không đồng chất chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại điểm (x,y) là $\delta(x,y)$ là hàm liên tục trên D.

Dựa vào cách xây dựng tích phân hai lớp và các công thức của I_x, I_y, I_O, ta có moment quán tính của bản phẳng đối với trục Ox, Oy và gốc O tương ứng là:

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x,y)\,dxdy$$

$$I_y = \iint_D x^2\delta(x,y)\,dxdy$$

$$I_O = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y)\,dxdy$$

Ví dụ:

Tính các moment quán tính của bảng phẳng D giới hạn bởi các đường:

$y^2 = 1-x, (y\ge 0), x=0, y=0$ đối với trục Ox, Oy, biết khối lượng riêng của bản tại (x,y) là $\delta(x,y)=y$.

Giải

Ta có

$$I_x = \iint_D y^2.ydxdy = \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x}} y^3dy = \int_0^1 \frac{1}{4}y^4\Big|_0^{\sqrt{1-x}}dx = \frac{1}{12}$$

$$I_y = \iint_D x^2.ydxdy = \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x}} x^2ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{24}.$$

♦ **Moment tĩnh và tọa độ trọng tâm của bản phẳng**

Xét một hệ gồm n chất điểm có khối lượng riêng $m_1,\dots,m_n$ đặt tại các điểm $M_1(x_1,y_1),\dots,M_n(x_n,y_n)$. Ta biết moment tĩnh của hệ đối với các trục Ox, Oy và các tọa độ trọng tâm của nó được cho bởi các công thức sau:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i ; M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} ; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát. Giả sử ta có một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại điểm (x,y) là $\delta = \delta(x, y)$, trong đó $\delta(x, y)$ là hàm liên tục trong miền D. Dựa vào cách xây dựng tích phân hai lớp và các công thức M_x, M_y, x_c, y_c ở trên ta có các công thức tính moment tĩnh đối với các trục Ox, Oy và các tọa độ trọng tâm của bản phẳng là:

$$M_x = \iint_D y\delta(x, y)dxdy$$

$$M_y = \iint_D x\delta(x, y)dxdy$$

$$x_c = \frac{\iint_D x\delta(x, y)dxdy}{\iint_D \delta(x, y)dxdy}$$

$$y_c = \frac{\iint_D y\delta(x, y)dxdy}{\iint_D \delta(x, y)dxdy}$$

Ví dụ:

Cho bản phẳng là một tam giác vuông có các cạnh góc vuông là OA=a, OB=b và có khối lượng riêng tại mỗi điểm bằng khoảng cách từ điểm đó đến cạnh OA. Hãy tính moment tĩnh của bản phẳng đối với cạnh OA.

Giải

Nếu ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho OA nằm trên Ox, OB nằm trên Oy thì khối lượng riêng của bản tại điểm M(x,y) là $\delta(x, y) = y$.

Khi đó moment tĩnh của bản đối với cạnh OA là:

$$M_x = \iint_D y\delta(x, y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} y^2 dy = \frac{1}{12}ab^3 .$$

2.2. TÍCH PHÂN BA LỚP

2.2.1. Khái niệm tích phân bội ba

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên miền đóng bị chặn $V \subset \mathbb{R}^3$ của không gian Oxyz.

Chia V thành n mảnh nhỏ không dẫm lên nhau và thể tích của chúng là $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$.

Trong mỗi miền nhỏ Δv_i (i=1,2,...,n) lấy điểm tuỳ ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$ và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$$

Gọi d_i là đường kính của miền Δv_i.

Cho $n \to +\infty$ sao cho $\max d_i \to 0$. Nếu tồn tại $\lim\limits_{\max d_i \to 0} I_n$ không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm M_i thì I được gọi là tích phân bội 3 của f(x,y,z) trên V. Kí hiệu:

$$I = \iiint_V f(x, y, z)dV$$

Trong đó: $f(x,y,z)$ là hàm dưới dấu tích phân, V là miền lấy tích phân, dV là phần tử thể tích.

Ta có: $I = \iiint_V f(x, y, z)dV = \lim\limits_{\max d(\Delta v_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$

Nếu hàm $f(x,y,z)$ có tích phân 3 lớp thì ta nói $f(x,y,z)$ khả tích trong miền V.

***Chú ý:**

i) Vì không phụ thuộc cách chia, nên ta có thể chia V bởi các mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ, tức là dV = dxdydz. Do đó

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

ii) Đặc biệt: nếu f(x,y,z)=1 thì $\iiint_V dV$ là thể tích miền V.

2.2.2. Tính chất

i) **Định lý 1.** Nếu hàm $f(x,y,z)$ liên tục trong miền hữu hạn V thì $f(x,y,z)$ khả tích trong miền V.

ii) $V_D = \iiint_D dxdydz$.

iii) $\iiint_D \alpha.f(x,y,z)dxdydz = \alpha \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$.

iv) $\iiint_D (f+g)dxdydz = \iiint_D f dxdydz + \iiint_D g dxdydz$.

v) Nếu D được chia làm hai khối D_1 và D_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iiint_D f dxdydz = \iiint_{D_1} f dxdydz + \iiint_{D_2} f dxdydz.$$

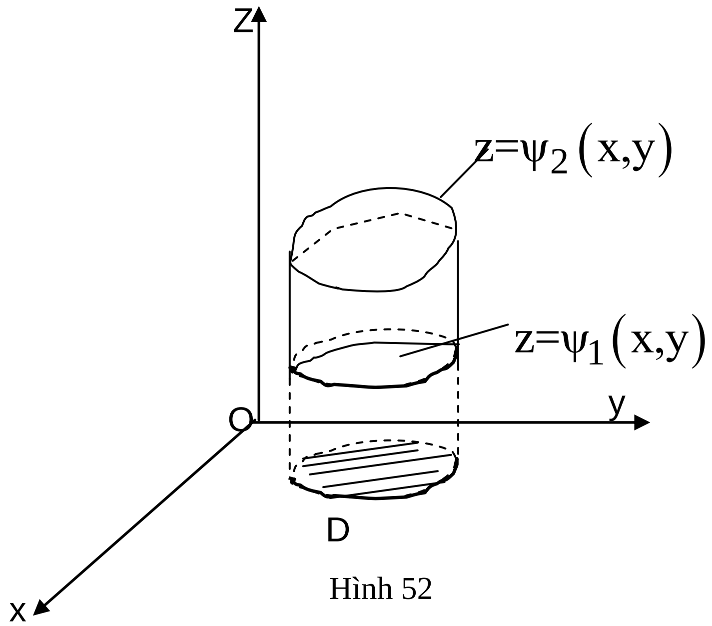
vi) $\forall(x,y,z)\in D, f(x,y,z)\le g(x,y,z)\Rightarrow \iiint_D f \le \iiint_D g$.

2.2.3. Cách tính tích phân 3 lớp

Tính tích phân $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ dựa vào dạng của miền V.

2.2.3.1. Miền V là thể trụ mở rộng

V được gọi là thể trụ mở rộng nếu nó là vật thể giới hạn phía dưới bởi mặt cong $z=\psi_1(x,y)$, phía trên bởi mặt cong $z=\psi_2(x,y)$, hai mặt cong liên tục và mỗi đường thẳng song song với trục Oz cắt mỗi mặt không quá một điểm và giới hạn chung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz.



Hình 52

Giả sử D là hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy.

Trước hết bằng cách lấy tích phân theo hướng Oz ta tính tích phân của hàm $f(x,y,z)$ dọc theo đoạn ở trong và song song với trục Oz, đoạn thẳng này cắt D tại điểm M(x,y). Cho trước các giá trị của x, y thì z sẽ biến thiên từ $z=\psi_1(x,y)$ đến $z=\psi_2(x,y)$.

Kết quả của việc lấy tích phân này ta được một biểu thức phụ thuộc vào M(x,y) là:

$$F(x,y)=\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Trong tích phân này thì x, y xem như không đổi trong quá trình lấy tích phân.

Bây giờ ta lấy tích phân của hàm $F(x,y)$ với điều kiện M(x,y) chạy khắp trong D thì giá trị tích phân cần tính là $\iint_D F(x,y)dxdy$.

Vì vậy ta có:

$$I=\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iint_D\left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

Vế phải của công thức trên thường được kí hiệu là:

$$\iint_D dxdy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Nếu D là miền xác định bởi các đường thẳng x=a, x=b, (a<b), $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$) thì bằng cách đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp ta được:

$$I=\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\ .$$

2.2.3.2. Miền V là hình hộp chữ nhật

Khi D là hình hộp chữ nhật giới hạn bởi các đường x=a, x=b, y=c, y=d, z=e, $z=f$ (a<b, c<d, e<f) thì đây là trường hợp đặc biệt của trường hợp trên. Ta có $I=\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^f f(x,y,z)dz$

Hơn nữa , nếu $f(x,y,z)=f_1(x).f_2(y).f_3(z)$ thì

$$\iiint_V f(x,y,z)=\int_a^b f_1(x)dx.\int_c^d f_2(y)dy.\int_e^f f_3(z)dz\ .$$

♦**Ví dụ:**

1) Tính $\iiint_V (xy^2+z^3)dxdydz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 2$.

Giải

Ta có

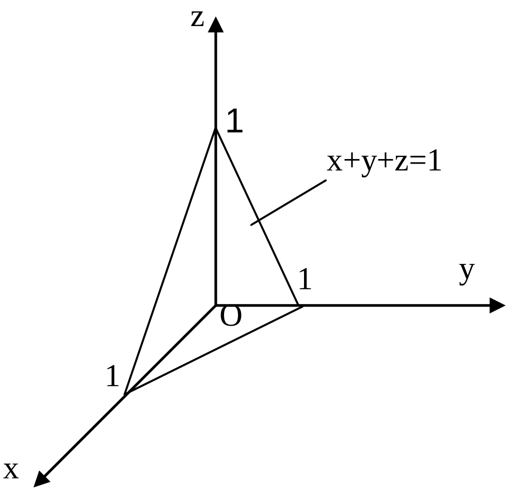
$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^2 (xy^2+z^3)\,dz=\int_0^1 dx\int_0^1\left(xy^2+\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{2}{3}x+4\right)dx=\left(\frac{x^2}{3}+4x\right)\Bigg|_0^1=\frac{13}{3}$$

2) Tính $\iiint_V xyzdxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng x=0, y=0, z=0 và x+y+z=1.

Giải

Ta thấy V xác định bởi $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$, $0\le z\le 1-x-y$ nên



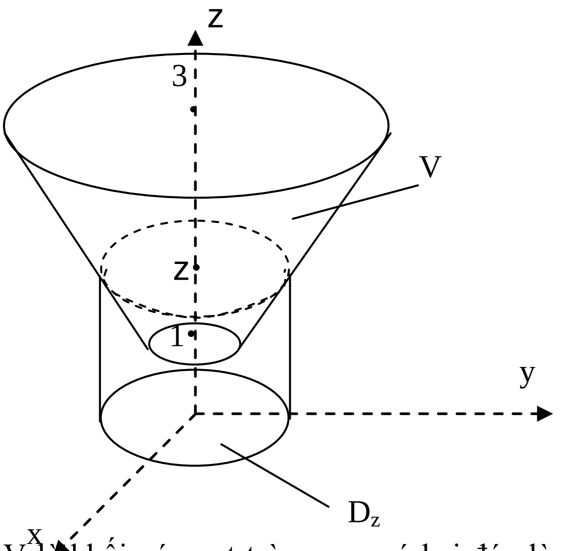
Hình 53

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} xyzdz$$

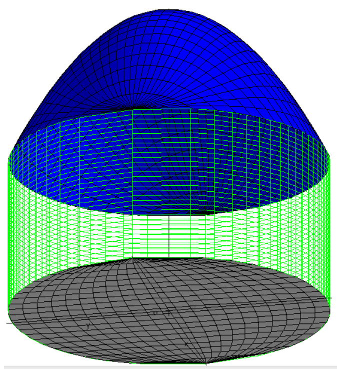
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(xy\frac{z^2}{2}\right)dy=\frac{1}{720}.$$

3) Tính $\iiint\limits_V zdxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng z=1, z=3 và mặt nón $z^2=x^2+y^2$.

Giải



Hình 54



Hình 55

V là khối nón cụt tròn xoay có hai đáy là: hình tròn $x^2+y^2\le 1$ trong mặt z=1 và hình tròn $x^2+y^2\le 9$ trong mặt z=3. Với mỗi $z\in[1,3]$, mặt phẳng Z=z cắt V theo hình tròn $x^2+y^2\le z^2$. Hình chiếu của hình tròn này trên mặt Oxy là hình tròn $D_z=\{(x,y):x^2+y^2\le z^2\}$

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_1^3 zdz=20\pi.$$

4) Tính tích phân bội ba $I=\iiint\limits_V (x+z)dxdydz$ trong đó V là vật thể giới hạn bởi $x^2+y^2=1$, $z=2-x^2-y^2$, $z=0$

Giải

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$.

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[\int\limits_0^{2-x^2-y^2}(x+z)dz\right]dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{(2-x^2-y^2)^2}{2}dxdy=\frac{7\pi}{6}.$$

2.2.4. Đổi biến trong tích phân 3 lớp

2.2.4.1. Trường hợp tổng quát

Từ công thức đổi biến của tích phân hai lớp ta có thể mở rộng ra cho tích phân ba lớp.

Giả sử ta có phép biến đổi:

$$\begin{cases} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Trong đó $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền bị chặn V' của không gian uvw.

Công thức (2.3.1) là phép biến đổi 1-1 từ miền V' trong không gian uvw đến miền V của không gian xyz.

Định thức hàm Jacobian

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong miền V'}$$

Khi đó ta có công thức

$$I=\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V} f\left[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right]|J|dudvdw$$

♦**Ví dụ:** Tính thể tích của elipxôit: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

Giải

Dùng phép biến đổi x=au, y=bv, z=cw thì elipxôit trở thành hình cầu:

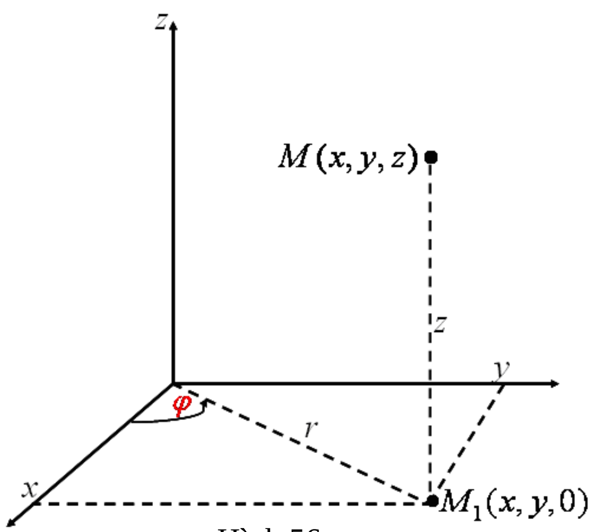
V': $u^2+v^2+z^2\le 1$

Ta có định thức Jacôbian

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Do đó thể tích của elipxôit là:

$I=\iiint_V dxdydz = \iiint_{V'} abcdudvdw=abc$ x thể tích V'=$\frac{4}{3}abc$.



Hình 56

2.2.4.2. Đổi biến trong tọa độ trụ

***Hệ toạ độ trụ:**

Cho điểm M(x,y,z) trong không gian Oxyz.

M được xác định duy nhất bởi bộ ba (r,φ,z), được gọi là tọa độ trụ của điểm M.

$\varphi=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM_1}\right)$, $r=\overline{OM_1}$, $z=\overline{MM_1}$ với M_1 là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

Từ hình vẽ ta có công thức liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ trụ của điểm M là:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \quad (2.3.2) \\ z=z \end{cases}$$

Nếu r>0, $0\le\varphi\le 2\pi\ (-\pi\le\varphi\le\pi)$, $-\infty<z<\infty$ thì công thức (2.3.2) xác định một phép biến đổi 1-1.

***Nhận xét:**

i) Trong toạ độ trụ ta luôn có $x^2+y^2=r^2$.

ii) Mặt phẳng r=a (a là hằng số) trong không gian $r\varphi z$ ứng với mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz.

iii) Mặt phẳng $\varphi=\alpha$ (α là hằng số) trong không gian $Or\varphi z$ ứng với nửa mặt phẳng qua Oz và tạo với mặt phẳng Oxz một góc bằng α trong không gian Oxyz.

iv) Mặt phẳng z=k (k là hằng số) trong không gian $Or\varphi z$ ứng với mặt phẳng z=k trong không gian Oxyz.

v) Công thức đổi biến trong toạ độ trụ

Ta tính tích phân $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ bằng phép đổi biến (2.3.2) r>0, $0\le\varphi\le 2\pi\ (-\pi\le\varphi\le\pi)$, $-\infty<z<\infty$.

(2.3.2) là phép biến đổi 1-1 từ V' trong không gian $Or\varphi z$ đến miền V trong không gian Oxyz.

Ta có định thức hàm Jacobian

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r$$

Vậy ta có công thức đổi biến trong toạ độ trụ là:

$$I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)rdrd\varphi dz.$$

***Chú ý:** Nếu V là thể trụ mở rộng đã xét ở phần trước có hình chiếu D xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm O bán kính R thì miền V' xác định bởi:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \\ \psi_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \le z \le \psi_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_{\psi_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{\psi_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} r.f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz$$

Đặc biệt khi V là hình trụ $x^2+y^2 \le R^2$, $0 \le z \le h$ thì

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^h r.f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz$$

♦**Ví dụ:** 1. Tính $I = \iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=0,\ y=4,\ z=0,\ z=2$.

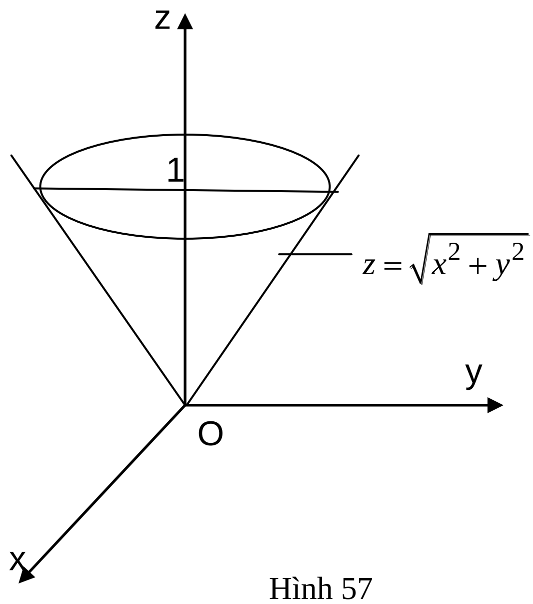
Giải

Chuyển sang toạ độ trụ thì $I = \iiint_{V'} r^2 r\,dr\,d\varphi\,dz$, trong đó V' xác định bởi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ 1 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 2$.

Do đó

$$I = \iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 r^3 dr \int_0^2 dz = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 .(2-0) = \frac{15}{8}\pi$$

2) Tính $I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $z^2 = x^2+y^2 = 4, z = 1$.



Hình 57

Giải

Chuyển sang toạ độ trụ thì V' là miền giới hạn bởi $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r \le z \le 1$. Do đó

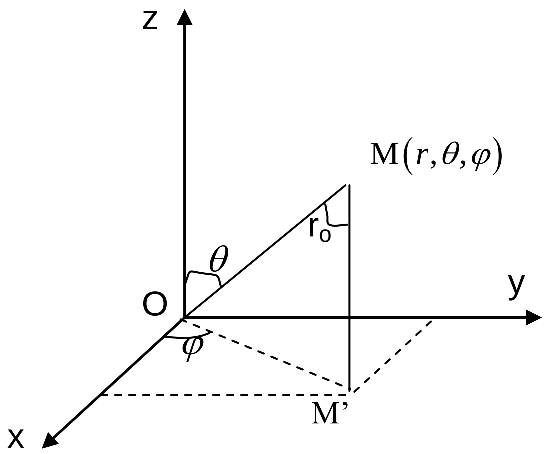
$$I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 rr\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r)\,dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

2.2.4.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Toạ độ cầu của điểm M(x,y,z) trong không gian Oxyz là bộ ba (r,θ,φ), trong đó

$$\begin{cases} r=OM \\ \theta=\left(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM}\right) \\ \varphi=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM'}\right) \end{cases}$$



Hình 58

Với M’ là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng Oxy.

Từ hình vẽ ta có công thức liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ cầu (r,θ,φ):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \quad (2.3.3) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Ta thấy với $r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$ thì (2.3.3) là phép biến đổi 1-1.

***Nhận xét:**

i) Trong toạ độ cầu ta luôn có $x^2+y^2+z^2=r^2$.

ii) Mặt phẳng r=R (R là hằng số) trong không gian $r\theta\varphi$ ứng với mặt cầu có bán kính R trong không gian Oxyz.

iii) Mặt phẳng $\theta=\theta_0$ (θ_0 là hằng số) trong không gian $Or\theta\varphi$ ứng với mặt nón tròn xoay có trục Oz, đường sinh làm với trục một góc θ_0 trong không gian Oxyz.

iv) Mặt phẳng $\varphi=\varphi_0$ (φ_0 là hằng số) trong không gian $Or\theta\varphi$ ứng với nửa mặt phẳng Oxz một góc bằng φ_0 trong không gian Oxyz.

v) Công thức đổi biến trong toạ độ cầu

Ta tính tích phân $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ bằng phép đổi biến (2.3.3) $0 \le \varphi \le 2\pi$ (hay $-\pi \le \varphi \le \pi$), $0 \le \theta \le \pi$, $0 < r < +\infty$.

(2.3.3) là phép biến đổi 1-1 từ V’ trong không gian $Or\theta\varphi$ đến miền V trong không gian Oxyz.

Ta có định thức hàm Jacobian $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = -r^2\sin\theta \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$

Vậy ta có công thức đổi biến trong toạ độ trụ là:

$$I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)rdrd\varphi dz.$$

Ví dụ:

1. Tính $I=\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi hai mặt $x^2+y^2+z^2=1;\ x^2+y^2+z^2=4$.

Giải

Chuyển sang tọa độ cầu

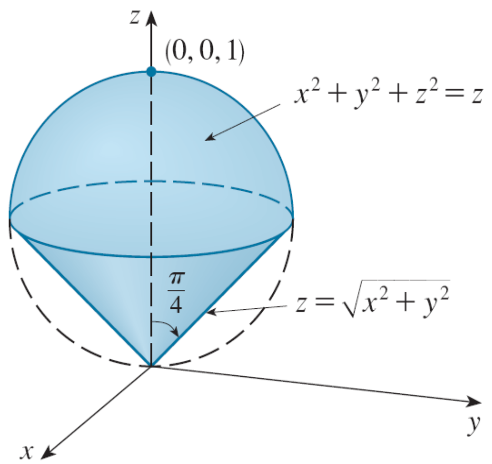
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Ta được:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \quad \text{và } |J| = r.\sin\theta \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 \frac{1}{r}\cdot r^2 dr = 2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_1^2 = 6\pi.$$

2. Tính tích phân $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ trong đó V là vật thể giới hạn bởi $z \ge \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2 \le z.$



Hình 59

Giải

Đổi sang tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Xác định cận:

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < r < \cos\theta$

$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} r\cdot r^2\sin\theta\cdot dr = \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{2}}{80}\right)\pi.$$

3. Tính $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ trong đó V là miền ngoài giữa hình trụ $x^2+y^2 \le R^2$ và

hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le 4R^2$.

Giải

Đổi sang tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Ta có $r = 2R$ và $r = \dfrac{R}{\cos\theta} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6} v \theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Vì V là vật thể tròn xoay nhận Oz làm trục đối xứng, nhận mặt phẳng Oxy làm mặt phẳng đối xứng và hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn đối với x, y cho nên:

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_{\frac{R}{\sin\theta}}^{2R} r^4 \cdot \sin^2\theta dr = \frac{44\sqrt{3}}{5}\pi R^5.$$

2.2.5. Ứng dụng tích phân bội ba

2.2.5.1. Ứng dụng hình học

Từ định nghĩa tích phân bội ba ta có công thức tính thể tích vật thể Ω như sau: $V_\Omega = \iiint_\Omega dxdydz$

Ta có thể sử dụng tích phân kép để tính thể tích vật thể, tuy nhiên trong một số trường hợp sử dụng tích phân bội ba tính nhanh hơn vì tích phân bội ba có cách đổi sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.

Ví dụ:

1. Tính thể tích vật thể được giới hạn bởi các mặt sau:

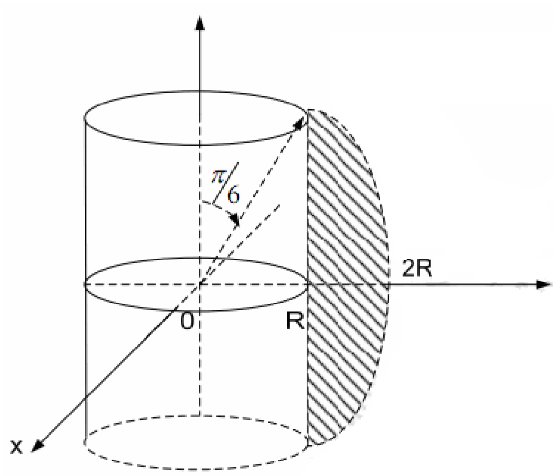
$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 1 \end{cases}$$

2. Tìm thể tích vật thể nằm phía trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2=6$ và phía trên parabolloid $z = x^2+y^2$.

Giải

Ta tìm phần giao của hai mặt phẳng:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$$



Hình 60

Ta có $z^2+z-6=0$ vì $z\ge 0$ nên chọn z=2.

Thể tích vật thể $V_\Omega=\iiint\limits_\Omega dxdydz$

Chuyển sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

Ta có hình chiếu của Ω lên mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2+y^2\le\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 0\le r\le\sqrt{2}$; $0\le\varphi\le 2\pi;\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}$.

Do đó $V_\Omega=\iiint\limits_\Omega dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_{r^r}^{\sqrt{6-r^2}}rdr$

2.2.5.2. Ứng dụng cơ học

Cho một vật thể không đồng chất chiếm Ω trong không gian Oxyz và có khối lượng riêng tại điểm M(x,y,z) là $\delta=\delta(x,y,z)$. Khi đó ta có các công thức sau:

Khối lượng của vật thể

$$m=\iiint\limits_\Omega \delta(x,y,z)dxdydz$$

Trọng tâm C của vật thể có tọa độ

$$x_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega x\delta(x,y,z)dxdydz$$

$$y_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega y\delta(x,y,z)dxdydz$$

$$z_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega z\delta(x,y,z)dxdydz$$

Ví dụ: Tìm tọa độ trọng tâm của nửa trên hình cầu tâm O bán kính R, biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm M(x,y,z) là $\delta(x,y,z)=c$ (c là hằng số).

Giải

Ta có: $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\right\}$

Vì hình cầu đồng chất và nhận trục Oy làm trục nên $x_C=y_C=0$ nên ta chỉ cần tìm z_C.

$m=\iiint\limits_\Omega cdxdydz=c.\frac{1}{2}$ thể tích của nửa mặt cầu$=\frac{2}{3}c\pi R^3$.

$$z_C = \frac{1}{\frac{2}{3}c\pi R^3}\iiint_{\Omega} zcdxdydz = \frac{3}{2\pi R^3}\iiint_{\Omega} zcdxdydz$$

Chuyển sang tọa độ cầu bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Ta được $0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le R$.

$$z_C = \frac{3}{2\pi R^3}\iiint_{\Omega'} (r\cos\theta)(r^2\sin\theta)d\varphi d\theta dr$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{3}{8}R.$$

BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 2

----

1. Hãy viết cận tích phân theo thứ tự khác nhau đối với miền D trong tích phân hai lớp $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$.

a) D là tam giác O(0,0), A(1,0), B(1,1)

b) D là tam giác O(0,0), A(2,1), B(-2,1)

2. Đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau:

a) $\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f\left(x,y\right)dy$

b) $\int_{1}^{3}dy\int_{0}^{2y}f\left(x,y\right)dx$

c) $\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{y^2}f\left(x,y\right)dx+\int_{1}^{3}dy\int_{0}^{\frac{3-y}{2}}f\left(x,y\right)dx$

d) $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f\left(x,y\right)dy$.

3. Tính các tích phân:

a) $\iint\limits_D x\ln y\,dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường x=0, x=4, y=1, y=e.

b) $\iint\limits_D \left(x-y\right)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

c) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $x=1, y=1$.

d) $\iint\limits_D \sin\left(x+y\right)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường y=0, y=x, $x+y=\frac{\pi}{2}$.

e) $\iint\limits_D x^2\left(y-x\right)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $x=y^2; y=x^2$.

4. Tính các tích phân:

a) $\iint\limits_D \left(x+y\right)^3\left(x-y\right)^2dxdy$

b) $\iint\limits_D xydxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường y=x, y=2x, $y^2=x, y^2=3x$.

5. Chuyển về tọa độ cực tính:

a) $\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$ với D là hình vành khăn giữa các vòng tròn hình tròn $x^2+y^2=e^2$ và $x^2+y^2=e^4$.

b) $\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)^2}}dxdy$ với D là hình có phương trình $x^2+2y^2\le 2$.

c) $\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy$ với D là nửa vòng tròn có phương trình $y=\sqrt{1-x^2}$ và Ox.

d) $\iint\limits_D xy^2dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$.

e) $\iint\limits_D \left(\frac{y}{x}+1\right)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $1\le x^2+y^2\le 2x$.

6. Tính diện tích hình phẳng giói hạn bởi các đường sau:

a) $x=4y-y^2, x+y=6$

b) $y^2=x^3, y^2=8(6-x)^3$

c) $y=2^x, y=-\frac{x}{2}, y=4$

d) y=x, x=2y, x+y=2, x+3y=2

e) $y=x^2$, $y=4-x^2$.

7. Tính

a) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xyzdz$

b) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\sqrt{a^2-x^2}}^{2\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} xdz$

8. Tính các tích phân sau:

a) $\iiint\limits_V zdxdydz$ với V là hình giới hạn bởi các mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=h$, $(h>0)$.

b) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ với V là hình giới hạn bởi các mặt $z^2=x^2+y^2$, $z=1$.

c) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$ với V là hình giới hạn bởi các mặt $2z=x^2+y^2$, $z=2$.

d) $\iiint\limits_V (1-x-y-z)dxdydz$ với V là hình giới hạn bởi $x\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y+z\le 1$.

9. Tính các tích phân sau trong tọa độ trụ hoặc cầu:

a) $\int\limits_0^{2r} dx\int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$

b) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)dz$

10. Tính

a) $\iiint\limits_V 6xyzdxdydz$ với V là hình giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $x \ge 0;\ y \ge 0; z \ge 0$.

b) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ với V là hình giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \le z$.

c) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$ với V là hình giới hạn bởi $a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$, $z \ge 0 \left(0 < a < b\right)$.

11. Tính thể tích của các vật thể được giới hạn bởi các mặt sau:

a) $z = x^2+y^2, z = 2x^2+2y^2, y = x, y = x^2$

b) $z = x^2+y^2, z = \sqrt{x^2+y^2}$

c) $x^2+y^2+z^2 = 2az, x^2+y^2 \le z^2$

d) $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2+z^2 = b^2, x^2+y^2 = z^2 \left(z \ge 0, 0 < a < b\right)$.

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT

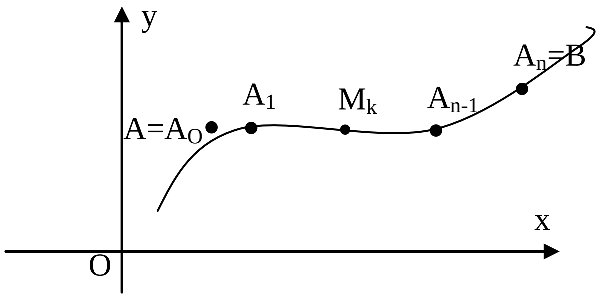
❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- Tính tích phân đường, tích phân mặt.
- Giải một số bài toán ứng dụng của tích phân đường, tích phân mặt.

3.1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

3.1.1. Tích phân đường loại 1

3. 1.1.1. Định nghĩa



Hình 61

Cho hàm số f(x,y) xác định trên cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_0A_1} \cup \overset{\frown}{A_1A_2} \cup ... \cup \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$. Đặt Δs_k là độ dài dây cung $A_{k-1}A_k$. Trên cung $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, chọn tuỳ ý điểm $M_k(x_k,y_k)$.

Lập tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k$.

Nếu S_n có giới hạn hữu hạn I khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\Delta s_k \to 0$ và k không phụ thuộc vào cách chia $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn các điểm M_k thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của f(x,y) trên cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds.$$

3.1.1.2. Định lí

Nếu hàm f(x,y) liên tục dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại 1 tồn tại.

3.1.1.3. Tính chất

i) Tích phân đường loại 1 có tất cả các tính chất của tích phân xác định.

ii) Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào hướng của cung, tức là:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)ds.$$

iii) Độ dài của cung đường cong L cho bởi $l = \int_L ds$.

3.1.1.2. Phương pháp tính

Cho tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds$ (1).

Để tính tích phân (1), ta đưa (1) về tích phân xác định.

a) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};\ a \le t \le b$$

thì $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$

b) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ trong không gian có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t);\ a \le t \le b \\ z = z(t) \end{cases}$$

thì $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt$

c) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tổng quát y=y(x) với $a \le x \le b$ thì

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x, y(x)\right).\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx.$$

d) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tổng quát x=x(y) với $a \le y \le b$ thì

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x(y), y\right).\sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2}dy.$$

e) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

thì $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f\left(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right).\sqrt{r^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}d\varphi$

3.1.1.2. Ví dụ

a) Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - y^2)ds$ với $\overset{\frown}{AB}$ là cung (phần tư thứ nhất) của đường tròn tâm O, bán kính R.

Giải

Ta có phương tham số của đường tròn là

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - y^2)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) = 0.$$

b) Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x + y)ds$ với $\overset{\frown}{AB}$ là tam giác có các đỉnh O(0,0), A(1,0), B(0,1).

c) Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xds$ với $\overset{\frown}{AB}$ là cung Parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$ từ O(0,0) đến B(2,2).

d) Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} z^2 ds$ với với $\overset{\frown}{AB}$ là đường xoắn ốc trụ tròn xoay có phương trình

x=acost, y=asint, z=bt, $0 \le t \le 2\pi$.

e) Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \sqrt{x^2 + y^2}ds$ với $\overset{\frown}{AB}$ là cung có phương trình là $x^2+y^2=ax$.

3.1.2. Tích phân đường loại 2.

3.1.2.1. Định nghĩa

Cho hai hàm số P(x,y) và Q(x,y) xác định trên cung phẳng L từ A đến B. Chia cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_0A_1} \cup \overset{\frown}{A_1A_2} \cup ... \cup \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$. Gọi $\overrightarrow{A_{k-1}A_k} = (\Delta x_k, \Delta y_k)$ và độ dài cung $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ là Δs_k, $k=\overline{1,n}$.

Với k=1, 2,...,n, lấy tuỳ ý $M_k(x_k,y_k)$ trên cung $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$.

Lập tổng $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} [P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k]$ gọi là tổng tích phân đường loại 2 của hàm số P(x,y) và Q(x,y) dọc theo L đi từ A đến B ứng với một phân hoạch của L và một cách chọn $M_k(x_k,y_k)$ thuộc $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max\Delta s_k \to 0$ hay $(\max\Delta x_k, \max\Delta y_k) \to (0,0)$ mà $I_n \to I$ (hữu hạn) không phụ thuộc vào cách chia $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn các điểm M_k thì số I được gọi là tích phân đường loại hai của hai hàm P(x,y) và Q(x,y) dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ đi từ A đến B và ký hiệu là

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

3.1.2.2. Tính chất

i) Tích phân đường loại hai cũng có các tính chất tương tự như tích phân xác định.

ii) Nếu ta đổi chiều lấy tích phân thì tích phân đổi dấu, tức là:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

iii) Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong trong không gian có ba hàm số $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại hai của ba hàm số đó cũng được kí hiệu là

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

iv) Nếu L là đường cong phẳng và kín. Người ta quy ước gọi hướng dương của đường cong L là hướng sao cho một người đi dọc L theo hướng đó thì thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở bên trái. Tích phân lấy theo hướng dương thường kí hiệu là

$$\oint_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Còn tích phân theo hướng ngược lại kí hiệu $\oint_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

v) Tương tự tích phân đường loại 1, người ta cũng chứng minh về sự tồn tại tích phân đường loại 2: nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn hoặc trơn từng khúc và các hàm P(x,y) và Q(x,y) liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của hai hàm P(x,y) và Q(x,y) lấy theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

3.1.2.3. Phương pháp tính

a) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};\ t_A \le t \le t_B$$

thì $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \left[P\big(x(t), y(t)\big).x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big).y'(t) \right] dt$.

b) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số trong không gian Oxyz

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t);\ t_A \le t \le t_B \\ z = z(t) \end{cases}$$

thì $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y,z)dz =$

$= \int_{t_A}^{t_B} \left[P(x(t),y(t),z(t)).x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t)).y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)).z'(t) \right] dt$.

c) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tổng quát y=y(x) với $x_A \le x \le x_B$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x)).y'(x) \right] dx.$$

d) Nếu cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tổng quát x=x(y) với $y_A \le y \le y_B$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_A}^{y_B} \left[P(x(y),y).x'(y) + Q(x(y),y) \right] dy.$$

Ví dụ:

a) Tính tích phân $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ydx - xdy$ với $\overset{\frown}{AB}$ là đường tròn có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

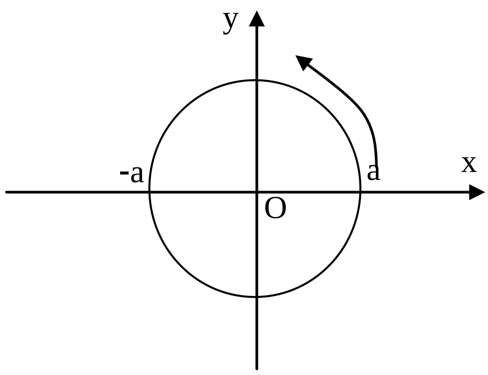
Giải

Ta có $0 \le t \le 2\pi$ và dx=-asintdt, dy=acostdt

$\Rightarrow I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ydx - xdy$

$= \int_0^{2\pi} [asint(-asint) - acost(acost)] dt$

$= -a^2 \int_0^{2\pi} dt = -2a^2\pi.$



Hình 62

b) Tính tích phân $I = \int\limits_L xydx + (x+y)dy$, trong đó L là:

i) Đoạn thẳng nối hai điểm O(0,0) và A(1,1).

ii) Cung parabol nối hai điểm O(0,0) và A(1,1).

iii) Đường gấp khúc nối O(0,0) A(1,1), B(1,0).

c) Tính $I = \int\limits_L xydx$, trong đó L là cung parabol $x = y^2$ nối hai điểm A(1,-1), B(1,1).

d) Tính tích phân $I=\int\limits_{L} zdx+xdy+ydz$, trong đó L có phương trình

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t\ ; \quad 0\le t\le 2\pi \\ z=3t \end{cases}$$

3.1.2.4. Công thức Green

Giả sử D là miền liên thông, bị chặn có biên là L gồm một hay nhiều đường cong kín trơn hoặc trơn từng khúc. Sau đây ta sẽ đưa ra công thức liên hệ giữa tích phân đường loại hai dọc theo L và tích phân bội hai trên miền D có tính chất đã nêu ra.

Định lí. Cho các hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp một trong miền D có biên là L. Khi đó

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L^{+}} Pdx+Qdy$$

Hệ quả. Diện tích miền D giới hạn bởi đường cong L được tính theo công thức $S_D=\dfrac{1}{2}\oint\limits_{L^{+}} xdy\text{-}ydx$.

Ví dụ:

a) Dùng công thức Green tính tích phân $I=\int\limits_{L}\left(-x^2y\right)dx+xy^2dy$, trong đó L là đường tròn $x^2+y^2=R^2$ lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Giải

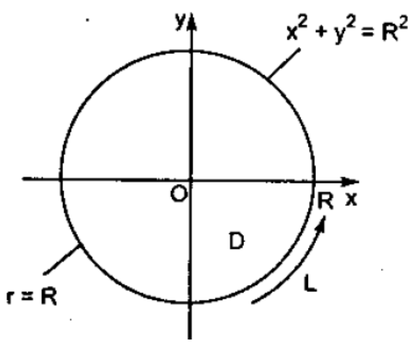
Áp dụng công thức Green, ta có

$$I=\int\limits_{L}\left(-x^2y\right)dx+xy^2dy=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases};\ 0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$I=\iint\limits_{D} r^3 drd\varphi=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}r^3dr=\frac{\pi R^4}{2}.$$



Hình 63

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Giải

Dạng tham số của elip là

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases};\quad 0 \le t \le 2\pi$$

Ta có $S_E = \dfrac{1}{2}\oint\limits_{L^+} \text{xdy-ydx} = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\text{abcos}^2\text{t+absin}^2\text{t}\right)dt = \pi ab$.

3.1.2.5. Định lí bốn mệnh đề tương đương

Xuất phát từ công thức Green, sau đây ta sẽ nhận được các điều kiện để biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó; để tích phân đường của một biểu thức không phụ thuộc vào dạng đường cong lấy tích phân. Trong trường hợp này, miền liên thông D phải là đơn liên.

Định lí. Giả sử các hàm $P(x,y),\ Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền đơn liên D. Khi đó bốn mệnh đề sau đây tương đương với nhau.

i) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y) \in D$

ii) $\oint\limits_L P\text{dx} + Q\text{dy} = 0$, L là đường cong kín bất kì nằm trong miền D

iii) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\text{dx} + Q\text{dy}$, trong đó cung $\overset{\frown}{AB}$ nằm trong miền D, chỉ phụ thuộc vào 2 điểm A, B mà không phụ thuộc dạng cung $\overset{\frown}{AB}$.

iv) Biểu thức $P\text{dx} + Q\text{dy}$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó trên miền D.

Hệ quả 1. Nếu $du(x,y) = P\text{dx} + Q\text{dy}$ trong miền D thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\text{dx} + Q\text{dy} = u(B) - u(A)$$

Hệ quả 2. Nếu $P\text{dx} + Q\text{dy}$ là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) trên toàn mặt phẳng R^2 thì hàm u(x,y) cho bởi công thức:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_o}^{x} P(x,y)\,\text{dx} + \int\limits_{y_o}^{y} Q(x_o,y)\,\text{dx} + C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int\limits_{x_o}^{x} P(x,y_o)\,\text{dx} + \int\limits_{y_o}^{y} Q(x,y)\,\text{dx} + C$$

Trong đó $A(x_o,y_o) \in \mathbb{R}^2,\ \text{M}(x,y) \in \mathbb{R}^2$

***Chú ý:**

i) Các hàm nếu tồn tại sẽ sai khác nhau hằng số C.

ii) Thông thường lấy $u(x_o, y_o) = (0,0)$ thì tính các tích phân trong hệ quả 2 đơn giản hơn.

Ví dụ:

a. Chứng minh biểu thức $(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$ là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) trên $\mathbb{R}^2$ và hãy tìm hàm đó.

Giải

Đặt

$$P(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -4xy$$

$$Q(x,y) = y^2 - 2x^2y + 3 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -4xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -4xy = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Vậy tồn tại hàm số $u(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

Ta có

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy + C \\ &= \int_0^x (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + \int_0^y (y^2 + 3) + C \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - x^2y^2 + 3(x+y) + C \end{aligned}$$

b. Tính $I = \int_{\widehat{AB}} \frac{x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$; A(1,1), B(2,4)

i) Cung $\widehat{AB}$ cho bởi phương trình $y = x^2, 1 \le x \le 2$.

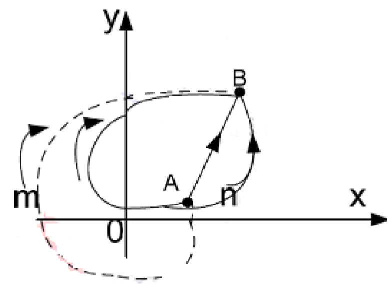
ii) Cung $\widehat{AB}$ bất kì tạo với đoạn thẳng AB thành đường cong kín không bao gốc tọa độ.

iii) Cung $\widehat{AB}$ bất kì tạo với đoạn thẳng AB thành đường cong kín bao gốc tọa độ.

Giải

Đặt $P(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$$Q(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$



Hình

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (\mathrm{x}, y) \in \mathbb{R}^2$$

i) Ta có

$$dy = d\left(x^2\right) = 2\mathrm{xdx}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}\int_1^2 \frac{2\mathrm{x}^2 - x^2}{x^2 + x^4} d\mathrm{x} = \int_1^2 \frac{2\mathrm{dx}}{1 + x^2} d\mathrm{x}$$

$$= \mathrm{arct\,anx}\Big|_1^2 = \mathrm{arct\,an2} - \frac{\pi}{4}$$

ii) Vì các hàm P, Q thỏa mãn điều kiện định lí 4 mệnh đề tương đương trên bất kì một miền đơn liên không chứa gốc tọa độ. Do đó tích phân đã cho không phụ thuộc vào dạng của cung $\overset{\frown}{AB}$, sao cho cung đó tạo với đoạn AB một đường cong kín không bao gốc tọa độ.

Vậy $I = \mathrm{arct\,an2} - \frac{\pi}{4}$.

iii) Khi cung $\overset{\frown}{AB}$ tạo với đoạn AB một đường cong kín bao gốc tọa độ thì không thể áp dụng định lý 4 mệnh đề tương đương được nữa do P, Q không liên tục trong miền đơn liên chứa gốc tọa độ. Trước hết, từ công thức Green suy ra: Tích phân không phụ thuộc dạng cung $\overset{\frown}{AB}$, miễn là cung đó tạo với đoạn AB thành đường cong kín bao gốc tọa độ. Bây giờ ta vẽ đường tròn C tâm O, bán kính đủ bé r. Xét miền liên thông nhị liên D có biên là C và đường cong kín. Theo công thức Green ta có:

$$0 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{dxdy} = \int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{BmA}} Pdx + Qdy + \oint_{C^-} Pdx + Qdy$$

Suy ra:

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} - \int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy$$

C cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^2} d\varphi = 2\pi$$

Vậy $I = \int_{\overset{\frown}{AmB}} \mathrm{Pdx{+}Qdy} = \arctan 2 - \frac{9\pi}{4}$.

3.2. TÍCH PHÂN MẶT

3.2.1. Tích phân mặt loại 1

3.2.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(M)=f(x,y,z)$ xác định trên mặt cong S.

Chia mặt S thành n mảnh không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của mảnh thứ i là $\Delta S_i, i=1,2,...,n$ và kí hiệu đường kính của mảnh thứ i là $d_i, i=1,2,...,n$.

Lấy điểm $M_i \in \Delta S_i, i=1,2,...,n$ tùy ý.

Lập tổng $I_n=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ gọi là tổng tích phân mặt loại 1 ứng với một cách chia mặt cong S và một cách chọn $M_i \in \Delta S_i, i=1,2,...,n$.

Nếu khi $n\to\infty$ sao cho $\max d_i \to \infty$ mà I_n hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia mặt cong S và cách lấy điểm $M_i \in \Delta S_i, i=1,2,...,n$ thì I gọi là tích phân mặt loại 1 của f(M) trên mặt cong S kí hiệu $I=\iint_S f(z,y,z)dS$,

3.2.1.2. Tính chất

i) Tích phân mặt loại 1 có các tính chất giống như tích phân kép.

ii) Từ định nghĩa ta có công thức tính diện tích mặt cong S nhờ vào tích phân mặt loại 1: $S=\iint_S dS$.

iii) Nếu S là mặt cong vật chất có hàm mật độ khối lượng là $\rho(x,y,z)$ thì khối lượng mặt cong vật chất đó sẽ là $m=\iint_S \rho(x,y,z)dS$.

iv) Người ta chứng minh được rằng: Nếu mặt cong S trơn (mặt cong S có pháp tuyến biến thiên liên tục) hoặc là trơn từng mảnh (chia S thành hữu hạn các mặt cong trơn) và hàm số $f(x,y,z)$ liên tục hoặc liên tục từng mảnh trên mặt cong S thì tồn tại tích phân mặt loại 1 của hàm số đó trên S.

3.2.1.3. Phương pháp tính

Giả sử hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trên mặt cong S trơn cho bởi phương trình $z=f(x,y,z),(x,y,z)\in D$. Khi đó

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy \quad (1)$$

***Chú ý:**

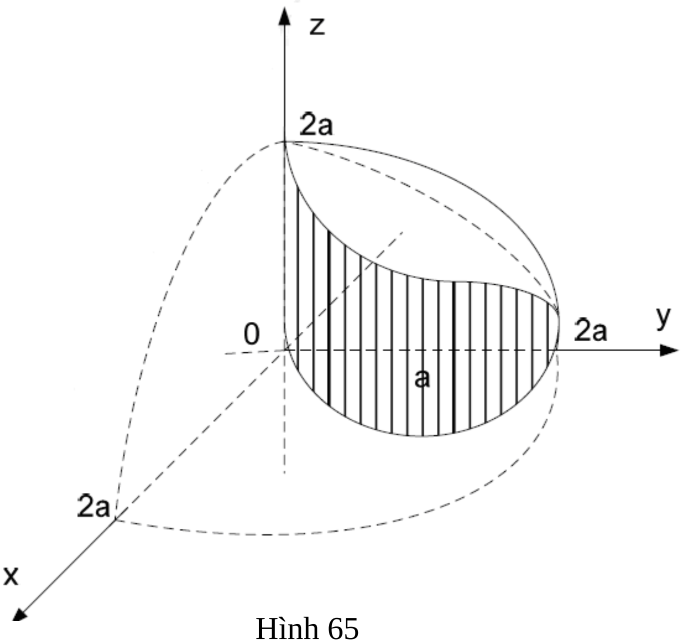
i) Nếu mặt cong S cho bởi phương trình $y=y(z,x)$ hoặc $x=x(y,z)$ thì ta phải chiếu S lên mặt phẳng Oxz hoặc Oyz để tìm miền tính tích phân kép tương ứng.

ii) Nếu S là mặt cong kín, ta phải chia S thành hữu hạn các phần, sau đó áp dụng công thức (1).

2.1.4.Ví dụ

a) Tính diện tích phần phía trên mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4a^2$ nằm trong hình trụ $x^2+y^2\le 2ay,(a>0)$

Giải



Hình 65

Do tính đối xứng nên ta chỉ cần tính một phần hai của phần mặt cầu trên. Phần mặt cầu trên có phương trình $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$.

Hình chiếu trên Oxy là nửa hình tròn D có bất phương trình:

$$x^2+(y-a)^2=a^2,(x>0)$$

Vậy $S=\iint\limits_S dS=2\iint\limits_D \sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy$

Ta có $z_x'^2=\dfrac{x^2}{4a^2-x^2-y^2},z_y'^2=\dfrac{y^2}{4a^2-x^2-y^2}$.

$$S=2\iint\limits_D \frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

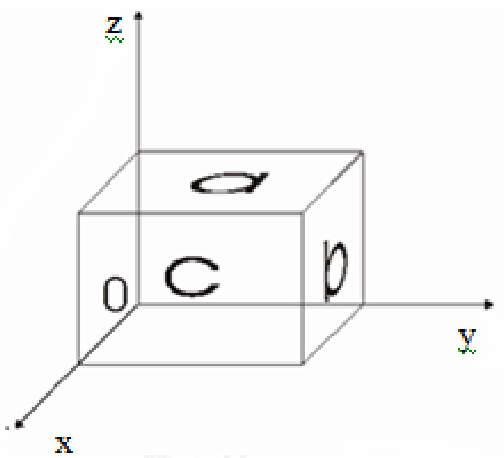
Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\sin\varphi}\frac{rdr}{\sqrt{4a^2-r^2}}=-2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\sin\varphi}\frac{d\left(-r^2\right)}{\sqrt{4a^2-r^2}}=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

b) Tính I= $\iint\limits_S$ xyzdS với S là các mặt hình lập phương $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$.

Giải

Do S là 6 mặt của hình lập phương nên xyz=0 trên 3 mặt phẳng nằm trên 3 mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx. Nên chỉ cần tính tích phân trên các mặt a, b, c.



Hình 66

Mặt a có z=1, D là hình vuông $0 \le x, y \le 1$ trên mặt phẳng Oxy

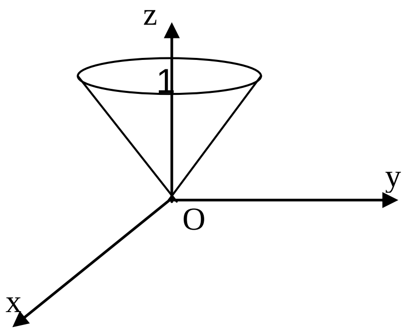
Nên $\iint\limits_a \text{xyzdS} = \iint\limits_D xy\text{dxdy} \int_0^1 xy\text{dxdy} = \frac{1}{4}$

Tương tự, ta có $\iint\limits_b \text{xyzdS} = \iint\limits_c \text{xyzdS} = \frac{1}{4}$

Vậy I= $\iint\limits_S \text{xyzdS} = \iint\limits_a \text{xyzdS} + \iint\limits_b \text{xyzdS} + \iint\limits_c \text{xyzdS} = \frac{3}{4}$

c) Tính $I = \iint\limits_S z\text{dS}$ trong đó S là phần của mặt nón

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dưới mặt phẳng z=1.



Hình 67

Giải

Ta có

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \text{dS} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\text{dxdy}$$

Do đó

$$I = \iint\limits_S z\text{dS} = \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\text{dxdy}$$

Với D= $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\text{dr} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

3.2.1.5. Ứng dụng của tích phân mặt loại 1

Cho mặt S có khối lượng riêng theo diện tích là $\delta(x, y, z)$ tại điểm (x, y, z). Khi đó khối lượng của mặt S là

$$M=\iint_S \delta(x,y,z)dS$$

Moment tĩnh đối với các mặt tọa độ của S là:

$$M_{yz}=\iint_S x\delta(x,y,z)dS$$

$$M_{xz}=\iint_S y\delta(x,y,z)dS$$

$$M_{xy}=\iint_S z\delta(x,y,z)dS$$

Tâm khối lượng của mặt S là điểm có tọa độ:

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M},\ \overline{y}=\frac{M_{xz}}{M},\ \overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}$$

Moment quán tính đối với trục Ox, Oy, Oz với góc O và đường thẳng Δ là:

$$I_x=\iint_S (y^2+z^2)\delta(x,y,z)dS$$

$$I_y=\iint_S (x^2+z^2)\delta(x,y,z)dS$$

$$I_z=\iint_S (x^2+y^2)\delta(x,y,z)dS$$

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\delta(x,y,z)dS$$

$$I_\Delta=\iint_S r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)dS$$

Trong đó $r(x,y,z)$ là khoảng cách từ điểm M(x,y,z) đến đường thẳng Δ.

Ví dụ:

Tìm trọng tâm của nửa mặt cầu tâm O(0,0,0), bán kính a với khối lượng riêng $\delta=$ hằng số.

Giải

Gọi M(x,y,z) là tọa độ trọng tâm của nửa mặt cầu tâm O(0,0,0), bán kính a. Khi đó phương trình của mặt cầu S là $x^2+y^2+z^2=a^2\,(z\ge 0)$. Do tính đối xứng nên x=y=0. Ta chỉ cần tính z theo công thức

$$\overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\delta\iint_S zdS}{\delta\iint_S dS}=\frac{\delta\iint_S zdS}{\delta S}$$

S là nửa mặt cầu bán kính a nên $S=2\pi a^2$.

$$\iint_S zdS=\iint_S z\frac{a}{z}dxdy=a\iint_D dxdy=aS_D=a\pi a^2$$

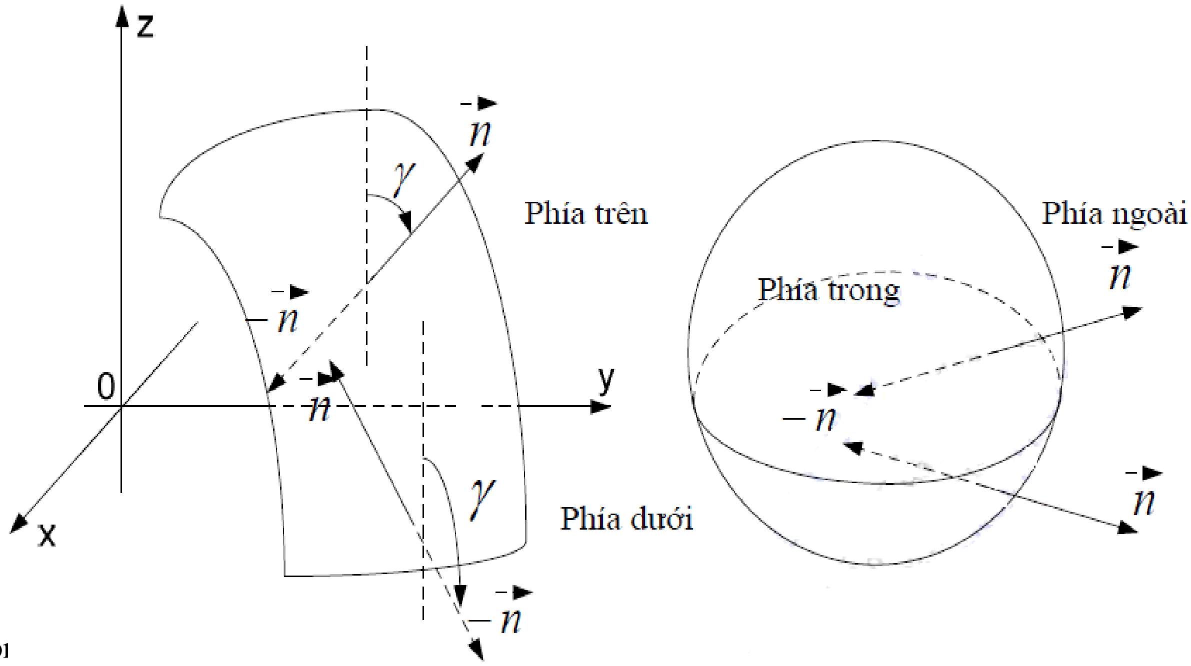
Suy ra $z = \frac{a}{2}$.

Tọa độ của trọng tâm là $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$.

3.2.2. Tích phân mặt loại 2

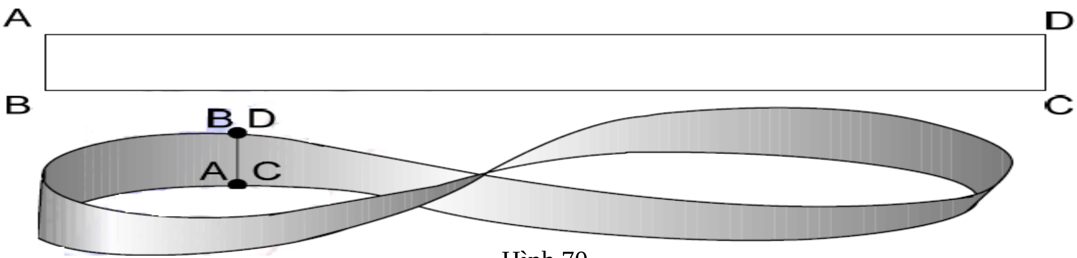
3.2.2.1. Mặt định hướng

Mặt cong S trơn gọi là định hướng được nếu vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$ hoàn toàn xác định tại mọi điểm $M \in S$ và biến đổi liên tục khi M chạy trên S. Tập hợp $\vec{n}(M), \forall M \in S$ của mặt cong định hướng xác định phía dương của mặt cong, là phiá mà người ta đứng đó thì $\vec{n}(M)$ hướng từ chân lên đầu. Vì $-\vec{n}(M)$ cũng là vectơ pháp tuyến nên mặt định hướng luôn có hai phía.



khôı
định bởi $\vec{n}(M)$. Phía trên của mặt S là phía mà $\vec{n}(M)$ lập với trục Oz góc nhọn, còn phía dưới là phía mà $\vec{n}(M)$ lập với trục Oz góc tù. Hình 68

Khi mặt cong S kín định hướng được, người ta dung từ phía trong và phía ngoài để mô tả hướng đã xác định. Phía ngoài là phía mà $\vec{n}(M)$ hướng ra phía ngoài vật thể V bao quanh bởi mặt cong S, phía trong là phía ngược lại.



Hình 70

Có mặt cong không định hướng được, chẳng hạn mặt cong sau đây gọi là lá Mobius được tạo như sau: Lấy chữ nhật ABCD vặn cong để hai đầu gắn nhau sao cho A trùng với C và B trùng với D. Xác định một vectơ $\vec{n}(M)$ tại M nào đó của lá Mobius và cho M di chuyển theo lá không cắt biên một vòng về lại điểm ban đầu thì $\vec{n}(M)$ đổi hướng. Chứng tỏ $\vec{n}(M)$ không biến thiên liên tục. Vậy lá Mobius là mặt một phía.

3.2.2.2. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

Cho mặt cong S đã định hướng theo phía trên hoặc phía dưới. Tức là vectơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ lập với trục Oz một góc nhọn (hoặc góc tù) và hàm $\mathrm{R}(x,y,z)$ xác định trên S.

Chia mặt cong S thành n mảnh không dẫm lên nhau $\Delta S_i, i=\overline{1,n}$. Kí hiệu đường kính của mảnh thứ i là $d_i, i=\overline{1,n}$. Gọi ΔD_i là hình chiếu của ΔS_i lên mặt tọa độ Oxy kèm theo dấu xác định theo quy tắc: S định hướng theo phía trên thì ΔD_i có dấu dương, còn S định hướng theo phía dưới thì ΔD_i có dấu âm, $i=\overline{1,n}$.

Lấy tùy ý $M_i(x_i,y_i,z_i)\in\Delta S_i, i=\overline{1,n}$

Lập tổng $I_n=\sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z_i)\Delta D_i$ gọi là tổng tích phân mặt loại hai của hàm $\mathrm{R}(x,y,z)$ lấy trên mặt cong S đã định hướng ứng với một cách chia và một cách chọn $M_i\in\Delta S_i, i=\overline{1,n}$.

Nếu khi $n\to\infty$ sao cho $\max d_i\to 0$ mà I_n hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia S và cách chọn $M_i\in\Delta S_i, i=\overline{1,n}$ thì số I gọi là tích phân mặt loại hai của biểu thức $\mathrm{R}(x,y,z)dx\mathrm{d}y$ trên mặt cong S đã định hướng và kí hiệu:

$$I=\iint_S R(x,y,z)\mathrm{dxdy}$$

Tương tự, nếu chiếu lên các mặt phẳng Oyz và Ozx và them các hàm P(x,y,z), Q(x,y,z) xác định trên S thì ta gọi:

$$I=\iint_S P(x,y,z)\mathrm{dydz}+Q(x,y,z)\mathrm{dzdx}+R(x,y,z)dx\mathrm{d}y$$

là tích phân mặt loại hai của các hàm P, Q, R, chính xác hơn là của biểu thức $P(x,y,z)\mathrm{dydz}+Q(x,y,z)\mathrm{dzdx}+R(x,y,z)dx\mathrm{d}y$ lấy trên mặt cong S đã định hướng.

***Chú ý:**

i) Theo định nghĩa, nếu đổi hướng (phía ngược lại của S) thì tích phân mặt loại hai sẽ đổi dấu.

ii) Người ta chứng minh rằng, nếu mặt S định hướng được, trơn hoặc trơn từng mảnh và các hàm P, Q, R liên tục trên S thì tích phân mặt loại hai tồn tại.

iii) Tích phân mặt loại cũng có các tính chất như tích phân đường loại 2.

3.2.2.3. Phương pháp tính

Nếu $\mathrm{R}(x,y,z)$ liên tục trên mặt cong định hướng S trơn cho bởi phương trình $z=z(x,y),(x,y)\in D$ thì

$$\mathrm{I}=\iint_{\mathrm{S}}\mathrm{R}(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dzdy}=\pm\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{R}(\mathrm{x,y,z(x,y)})\mathrm{dxdy}$$

Dấu + khi lấy tích phân mặt loại hai theo phía trên của mặt S.

Dấu - khi lấy tích phân mặt loại hai theo phía dưới của mặt S.

Ví dụ: Tính $\iint\limits_S z\text{dxdy}$ với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Giải

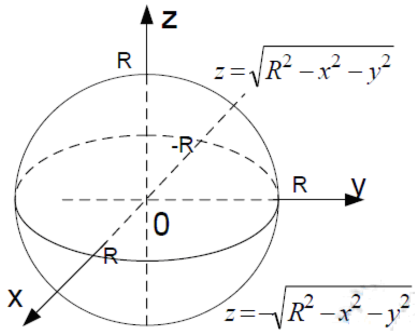
Chia mặt cầu thành nửa trên S_+ và nửa dưới S_- có phương trình lần lượt là:

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ và $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Chiếu các nửa mặt cầu lên Oxy ta được hình tròn: $D:\begin{cases}x^2+y^2\le R^2\\ z=0\end{cases}$

$$I=\iint\limits_{S_+} z\text{dxdy}+\iint\limits_{S_-} z\text{dxdy}$$

Tích phân lấy theo phía trên của S_+ và tích phân lấy theo phía dưới của S.



Hình 71

Ta có

$$\iint\limits_{S_+} z\text{dxdy}=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\iint\limits_{S_-} z\text{dxdy}=-\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

Vậy $I=2\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$.

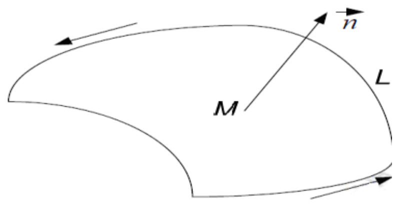
Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$I=2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,r\text{dr}=2\pi\left(-\frac{2}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^R=\frac{4}{3}R^3.$$

3.2.2.4. Công thức Stokes

Dưới đây ta sẽ có công thức mở rộng công thức Green, đó là mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai trong không gian với tích phân mặt loại hai.

Định lí (Stokes). Giả sử mặt cong S định hướng được, trơn từng mảnh có biên là đường L trơn từng khúc. Nếu các hàm số P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên mặt cong S thì



Hình

$$\int_{L^+} P\text{dx}+Q\text{dy}+R\text{dz}$$

$$=\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\text{dydz}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\text{dzdx}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\text{dxdy}$$

trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo hướng dương quy ước như sau: Đi theo hướng dương của L sao cho mặt cong S ở phía tay trái, khi đó mặt cong S được định hướng bởi vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ hướng từ chân lên đầu.

*** Chú ý:**

i) Công thức Green là trường hợp riêng của công thức Stokes.

ii) Tính tích phân đường loại 2 khi $L \in \mathbb{R}^3$ thường rất khó khăn (ta mới chỉ đưa ra công thức tính khi L cho bởi phương trình tham số). Do đó công thức Stokes tỏ ra rất hiệu lực khi mà L là biên của các mặt cong nào đó mà tích phân mặt loại hai trên nó có thể tính dễ dàng.

iii) Xuất phát từ công thức Stokes, ta nhận được định lý bốn mệnh đề tương đương xét trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Định lí. Giả sử các hàm $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng trên miền đơn liên V. Khi đó bốn mệnh đề sau đây là tương đương với nhau:

i) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y,z) \in V$.

ii) $\oint\limits_L$ Pd+Q$dy + Rdz = 0$, L là đường cong kín bất kì nằm trong miền V.

iii) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$, trong đó $\overset{\frown}{AB} \subset V$, chỉ phụ thuộc vào hai điểm A, B mà không phụ thuộc dạng cung $\overset{\frown}{AB}$.

iv) Biểu thức $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y,z)$ có thể tính theo công thức:

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} (x_0,y_0,z)dz + C$$

Trong đó $(x_0, y_0, z_0) \in V, (x,y,z) \in V, C$ là hằng số tùy ý và:

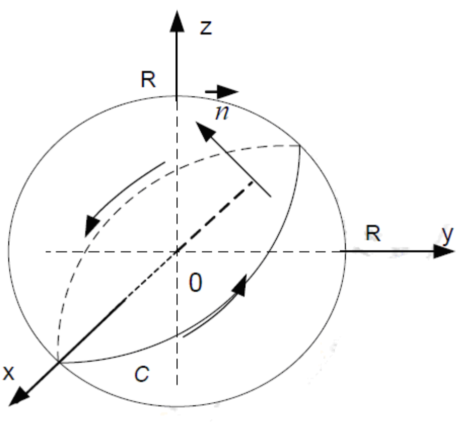
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = u(A) - u(B)$$

trong đó $\overset{\frown}{AB} \subset V$.

Ví dụ: Tính $I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$, với C là đường tròn, giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ và mặt phẳng $x + y + z = 0$ và hướng của L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía z>0.

Giải

Mặt phẳng $x + y + z = 0$ đi qua tâm mặt cầu. Vậy giao tuyến là đường tròn lớn. Lấy hình tròn là mặt cong S có biên là C. Các cosin chỉ phương của $\vec{n}$ định hướng



Hình 73

theo hướng của C là $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Đặt P=y, Q=z, R=x, áp dụng công thức Stokes, và công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại hai và loại một, ta có:

$$I = \iint_S \mathrm{dydz} + dz\mathrm{dx} + d\mathrm{xdy} = -\sqrt{3}\iint_S d\mathrm{S} = -\pi\sqrt{3}R^2 .$$

3.2.2.5. Công thức Gauss-Ostrogradski

Dưới đây ta có công thức liên hệ giữa tích phân bội ba và tích phân mặt loại hai, gọi đó là công thức Gauss-Ostrogradski

Định lí Gauss-Ostrogradski. Giả sử V là miền giới nội trong $\mathbb{R}^3$ có biên là mặt S trơn từng mảnh. Nếu các hàm số P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền V thì:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

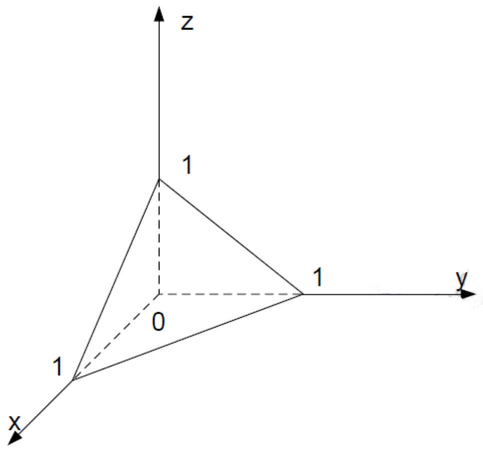
trong đó mặt lấy tích phân định hướng ra phía ngoài miền V.

***Chú ý:**

Có thể xem công thức Gauss-Ostrogradski là mở rộng của công thức Green từ không gian hai chiều ra ba chiều. Vì thế đôi khi tích phân trên mặt S không kín, ta có thể them mặt cong nào đó để áp dụng công thức Gauss-Ostrogradski.

Ví dụ:

Tính $I = \iint_S xz\mathrm{dydz} + \mathrm{yxdzdx} + zy\mathrm{dxdy}$ lấy theo phía ngoài của S là biên của hình chóp $\mathrm{x} \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1$.



Hình 74

Giải

Áp dụng công thức

$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{dx} + Q\mathrm{dy} + R\mathrm{dz} = u(A) - u(B)$, ta được

$$\iiint_V (x + y + z)\,d\mathrm{xdydz}$$

Chiếu V lên mặt phẳng Oxy được tam giác $\begin{cases} x + y \le 1 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \mathrm{dx}\int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 \mathrm{dx}\int_0^{1-x} \frac{1}{2}(x + y + z)\Big|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{8}.$$

BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 3

Tính các tích phân đường

1. I=$\int\limits_{L}$ xyds , L là biên hình chữ nhật ABCD với A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2).

2. I=$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}$ xyzds, L cho bởi phương trình:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \qquad ; 0 \le t \le 1 \\ z = \dfrac{\sqrt{8}t^3}{3} \end{cases}$$

3. I=$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}$ xyds , với cung $\overset{\frown}{AB}$ là elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ở phần tư thứ nhất.

4. I=$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x\text{-}y)ds$, với cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x^2 + y^2 = 2ax$.

5. I=$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}$ xyds , với cung $\overset{\frown}{AB}$ là hình vuông $|x| + |y| = a,\ (a > 0)$.

6. I=$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \dfrac{1}{x\text{-}y} ds$, với cung $\overset{\frown}{AB}$ là đoạn thẳng AB, A(0,2), B(4,0).

7. I=$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}+4} ds$, với cung $\overset{\frown}{AB}$ là đoạn thẳng AB, A(0,0), B(1,2).

8. $I = \oint\limits_{L} y^2dx\text{-}x^2dy$, với L là đường tròn bán kính R=1, có hướng ngược chiều kim đồng hồ và

a. Với tâm tại gốc tọa độ

b. Với tâm tại I(1,1)

9. $I = \oint\limits_{L} \cos y dx\text{-}\sin x dy$, với L là đoạn thẳng nối từ điểm A(2,-2) đến B(-2,2).

10. $I = \oint\limits_{L} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, với L là đường cong có phương trình $y = 1 - |1 - x|$, $0 \le x \le 2$.

11. $I = \oint\limits_{L} (x + y)dx + (x - y)dy$, với L là elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

12. $I = \oint\limits_{L} (2a - y)dx + xdy$, với L là một vòm cuốn của đường xicloid có phương trình:

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$.

13. $I = \oint\limits_L (x^2 + y^2)dx + xydy$, L là cung của đường $y = e^x$ từ điểm A(0,1) đến điểm B(1,e).

Áp dụng công thức Green tính các tích phân đường sau

14. $I = \oint\limits_L xy^2dy - x^2dx$, với L là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = a^2$.

15. $I = \oint\limits_L e^{-x^2+y^2}(\cos 2xydx + \sin 2xy)dy$, với L là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$.

16. $I = \oint\limits_L (1 + xy)dx + y^2dy$, với L là nửa trên của đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 \le 2x(y \ge 0)$.

17. $I = \oint\limits_{AmBnA} (x + y)dx - (x - y)dy$, trong đó AmB là cung parabol qua A(1,0) và B(2,3) và có trục đối xứng là trục Oy, còn AnB là đoạn thẳng nối A với B.

Tính các tích phân mặt sau

18. $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$ nếu

a. S là mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$.

b. S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

19. $I = \iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right)dS$, S là phần của mặt phẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ nằm ở gốc phần tám thứ nhất.

20. $I = \iint\limits_S (yz + zx + xy)dS$, S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2ax(a > 0)$.

21. $I = \iint\limits_S xdS$, S là phần mặt trụ $z = \frac{x^2}{2}$ nằm trong gốc phần tám thứ nhất của mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

22. $I = \iint\limits_S xyzdxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, (x \ge 0, y \ge 0)$.

23. $I = \iint\limits_S xdydz + dzdx + xz^2dxdy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

24. $I=\iint\limits_S \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$, S là mặt ngoài của elipxoit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

25. $I=\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, S là mặt trên nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(z\le 0)$.

Chương 4
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:
- Hiểu các khái niệm cơ bản về phương trình vi phân.
- Giải phương trình vi phân cấp một, cấp hai cơ bản.

4.1. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1.1. Khái niệm

Trong toán học phương trình vi phân là một chuyên ngành phát triển có tầm quan trọng và có nhiều ứng dụng thực tế trong các lĩnh vực khoa học kỹ thuật, kinh tế. Để làm quen với khái niệm phương trình vi phân ta xem một số bài toán dẫn tới việc thiết lập phương trình vi phân dưới đây.

4.1.2. Một số bài toán dẫn tới phương trình vi phân

4.1.2.1. Bài toán 1

Cho một vật khối lượng m rơi tự do trong không khí. Giả sử sức cản không khí tỉ lệ với vận tốc rơi là v(t) vào thời thời điểm t với hệ số tỉ lệ là k>0. Tìm v(t).

Khi vật rơi thì lực tác dụng lên vật gồm có: lực hút của trái đất là mg và lực cản của không khí là kv(t). Do đó theo định luật Newton ta có $ma=F$ với a là gia tốc của vật rơi. Nghĩa là ta có phương trình:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv \text{ hay } mv'=mg-kv$$

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm v(t).

4.1.2.2. Bài toán 2

Cho một thanh kim loại được nung nóng đến nhiệt độ 300^0C, và được đặt trong 1 môi trường đủ rộng với nhiệt độ không đổi là 30^0C (và nhiệt độ tỏa ra từ thanh kim loại không làm thay đổi nhiệt độ môi trường). Tìm T(t) là nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm t.

Theo quy luật Newton tốc độ giảm nhiệt của thanh kim loại $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ tỉ lệ với hiệu nhiệt độ của vật thể T(t) và nhiệt độ môi trường 30^0C. Do đó ta có $T'(t)=k\left(T(t)-30^0\right)$

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm T(t) trong đó k>0 là hệ số tỉ lệ và T(0) = 300 là điều kiện ban đầu của bài toán.

4.1.2.3. Bài toán 3

Tìm phương trình $y=f(x)$ của một đường cong rằng tiếp tuyến tại mỗi điểm sẽ cắt trục tung tại điểm khác có tung độ bằng hai lần tung độ tiếp điểm. Biết rằng phương trình tiếp tuyến với đường cong $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0)$ có dạng $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Giao điểm của tiếp tuyến với trục tung có tung độ là $y_1=f'(x_0)(x_0)+y_0$

Theo giả thiết ta có $y_1=2y_0$, từ đó ta có phương trình $y_0=f'(x_0)(x_0)$.
Với điểm $M_0(x_0)$ là điểm bất kì nên ta có phương trình vi phân.

4.1.3. Các khái niệm chung về phương trình vi phân

4.1.3.1. Định nghĩa

Một phương trìnhmà ẩn cần tìm là hàm số và hàm số phải tìm có mặt trong phương trình đó dưới dạng đạo hàm hoặc vi phân các cấp được gọi là phương trình vi phân.

Nếu hàm số phải tìm là hàm của một biến số độc lập thì phương trình vi phân tương ứng còn được gọi là phương trình vi phân thường. Nếu hàm số phải tìm là hàm của nhiều biến số độc lập thì phương trình vi phân còn được gọi là phương trình đạo hàm riêng.

4.1.3.2. Cấp của một phương trình vi phân

Cấp của một phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân của hàm phải tìm có mặt trong phương trình vi phân đó.

Phương trình vi phân thường cấp n có dạng tổng quát như sau:

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0 \quad (1)$$

trong đó F là một hàm số của n+2 biến số $x,y,y',...,y^{(n)}$.

4.1.3.3. Nghiệm của phương trình vi phân

Nghiệm của phương trình vi phân (1) là hàm số $\varphi(x)$ xác định trong khoảng (a,b), mà khi thay $y=\varphi(x)$, $y'=\varphi'(x),...,y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x)$ vào (1) ta được một đồng nhất thức:

$$F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n)}(x)\right)=0$$

Giải một phương trình vi phân có nghĩa là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó. Về mặt hình học mỗi nghiệm của phương trình vi phân xác định một đường gọi là đường tích phân của phương trình. Giải một phương trình là tìm tất cả các đường tích phân của nó, các đường ấy được xác định hoặc bởi phương trình $y=\varphi(x)$ hoặc bởi phương trình $\varphi(x,y)=0$, hoặc bởi phương trình tham số x=x(t), y=y(t).

Ví dụ: Phương trình $\dfrac{dy}{dx}=2y$ là phương trình vi phân thường cấp 1, có nghiệm là hàm $y=ce^{2x}$ (c là hằng số); phương trình $y''-2y=e^x$ là phương trình vi phân thường cấp 2, phương trình $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp 2.

4.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

4.2.1. Tổng quát về phương trình vi phân cấp 1

4.2.1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân thường cấp 1 là phương trình được biểu diễn một trong các dạng sau:

- Dạng tổng quát: $$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \quad (2)$$

trong đó: x là biến số độc lập; y là hàm phải tìm; y’ là đạo hàm cấp một của y.

- Dạng đã giải theo đạo hàm: $\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)$ (3)
- Dạng đối xứng $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ (4)

ở dạng (2) và (3) thay cho kí hiệu $\frac{dy}{dx}$ ta có thể dùng kí hiệu y'.

Ví dụ: Phương trình $y'+xy=x\sin x,\ yy'+x^2+y^2=0$ là những phương trình vi phân cấp 1.

4.2.1.2 Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình vi phân cấp một y'=f(x,y) (5). Giả sử hàm f(x,y) liên tục trong miền nào đó chứa (x_0,y_0) thì phương trình vi phân cấp 1 đã cho sẽ tồn tại một nghiệm y=y(x); nghiệm này nhận giá trị $y_0=y(x_0)$.

Nếu ngoài ra $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)$ cũng liên tục trong miền nói trên thì y=y(x) là nghiệm duy nhất của phương trình vi phân cấp một đã cho.

Điều kiện để hàm y=y(x) nhận giá trị y_0 tại $x=x_0$ được gọi là sự kiện hay điều kiện đầu của phương trình vi phân cấp một và thường được ký hiệu: $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (5) thoả mãn điều kiện ban đầu đó được gọi là bài toán Cauchy của phương trình (5).

Về mặt hình học định lí trên khẳng định rằng với các điều kiện đã nêu, trong lân cận nào đó của điểm (x_0,y_0) tồn tại một đường cong tích phân duy nhất của phương trình (5) đi qua điểm ấy.

4.2.1.3 Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Việc tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp một dẫn đến việc lấy tich phân bất định, do đó trong biểu thức nghiệm của phương trình vi phân cấp một có mặt hằng số C bất kì y=φ(x,C).

Họ hàm số y=φ(x,C) được gọi là nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân thường cấp 1, nếu gán cho C một số bất kỳ thuộc tập số thực nào đó ta được một nghiệm của phương trình đó. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho C một giá trị bằng số nhất định được gọi là nghiệm riêng của phương trình.

Ví dụ: Phương trình vi phân $y'=\cos x$ có nghiệm tổng quát là y=sinx+C, nghiệm y=sinx ứng với C=0 là một nghiệm riêng.

Nhiều khi giải một phương trình vi phân cấp một ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không phải dưới dạng tường minh mà dưới dạng ẩn:

$$\phi(x,y,C)=0$$

trong đó C là hằng số tùy ý, hệ thức trên là liên hệ giữa biến độc lập x và nghiệm tổng quát phương trình vi phân cấp một gọi là tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp một. Mỗi tích phân ứng với một giá trị xác định của C được gọi là một tích phân riêng của phương trình vi phân cấp một.

Ví dụ: Xét phương trình $\frac{x}{2}dx+\frac{2y}{9}dy=0$.

Lấy tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=C$.

Với C=1 ta có tích phân riêng có đường biểu diễn là hình Ellip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Về phương diện hình học thì tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp một xác định cho ta một họ các đường cong trong mặt phẳng, họ này phụ thuộc vào một hằng số tuỳ ý C và mỗi một đường cong trong họ được gọi là một đường cong tích phân.

4.2.2. Phương trình vi phân có biến phân ly (tách biến)

4.2.2.1. Định nghĩa

Phương trình biến phân ly là phương trình có dạng:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (6)$$

trong đó M(x), N(y) là những hàm phụ thuộc x, y (x là biến độc lập; y là hàm cần tìm)

4.2.2.2. Phương pháp giải

Lấy tích phân hai vế phương trình (6) ta được tích phân tổng quát:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

***Nhận xét**:

Xét phương trình vi phân cấp một $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$

Nếu $M_2(y), N_1(x) \neq 0$ thì chia hai vế cho $M_2(y).N_1(x)$

$\Leftrightarrow \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$ và do đó tích phân tổng quát của (6)

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$$

Nếu $M_2(y)=0$ thì ta thấy $x=x_0$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $N_1(x)=0$ thì $y=y_0$ là nghiệm của phương trình.

4.2.2.3. Ví dụ

1. Giải phương trình:

a) $\frac{x}{x^2+1}dx+(y+1)dy=0$.

b) $(e^2+x+1)dx+(\sin y+2\cos y)dy$.

Giải

a) $\frac{x}{x^2+1}dx+(y+1)dy=0 \Leftrightarrow \int \frac{x}{x^2+1}dx+\int (y+1)dy=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}dx+\int (y+1)dy=0$

$\Leftrightarrow \ln(x^2+1)+2y^2+2y=2C$.

b) $\int\left(e^x+x+1\right)dx+\int\left(\text{siny}+2\text{cosy}\right)dy=0$

$\Leftrightarrow e^x+\frac{1}{2}x^2+x-\text{cosy}+2\sin y=C.$

2. Giải phương trình: $x^2(y + 1)dx + (x^3 - 1)(y - 1)dy = 0$ (1)

Giải

Nếu $\begin{cases}x^3-1\neq 0\\ y+1\neq 0\end{cases}$ thì tích phân tổng quát của phương trình

$$\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)dx+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)dy=0\Leftrightarrow\int\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)dx+\int\left(\frac{y-1}{y+1}\right)dy=C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-1)}{x^3-1}+\int\frac{2d(y+1)}{y+1}+y=C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right|+2\ln\left|y+1\right|+y=C$$

Ta thấy x=1, y=-1 là nghiệm của phương trình.

4.2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp (phương trình thuần nhất)

4.2.3.1. Định nghĩa

Hàm f(x,y) được gọi là hàm đẳng cấp k đối với x, y nếu $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f\left(x,y\right)$, $\lambda\neq 0$. Nếu k=0 thì $f(\lambda x,\lambda y)=f\left(x,y\right)$. Ta nói rằng f(x,y) là hàm đẳng cấp cấp 0 hay là đẳng cấp đối với x, y. Nếu f(x,y) là hàm đẳng cấp k đối với x, y thì nó luôn luôn được biểu diễn với dạng: $f(x,y)=\lambda^k\varphi(\frac{y}{x})$.

Ví dụ: 1. $f\left(x,y\right)=\frac{x-y}{2x-3y}$

$$f\left(kx,ky\right)=\frac{kx-ky}{2kx-3ky}=\frac{x-y}{2x-3y}=f\left(x,y\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x,y\right)=\frac{\frac{x}{y}-1}{2\frac{x}{y}-3}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

2. $f\left(x,y\right)=\frac{x^2-xy}{x^2+3y^2}$.

$$f\left(kx,ky\right)=\frac{\left(kx\right)^2-\left(kxky\right)}{\left(\mathrm{kx}\right)^2+3\left(ky\right)^2}=\frac{x^2-xy}{\mathrm{x}^2+3y^2}=f\left(x,y\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x,y\right)=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}}{\left(\frac{\mathrm{x}}{y}\right)^2+3}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

4.2.3.2. Định nghĩa

Phương trình vi phân $\mathrm{y'=f\left(x,y\right)}$ được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp nếu hàm f(x,y) là một hàm đẳng cấp đối với x,y nghĩa là f(x,y)=φ($\frac{y}{x}$).

4.2.3.3. Phương pháp giải

Vì f(x,y) là hàm đẳng cấp nên f(x,y)=φ($\frac{y}{x}$). Khi đó phương trình $\mathrm{y'=f\left(x,y\right)}$ $\Leftrightarrow y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Đặt $u=\frac{y}{x}$ hay $y=ux\Rightarrow\frac{dy}{\mathrm{dx}}=u+x\frac{du}{\mathrm{dx}}\Rightarrow\varphi\left(u\right)=u+x\frac{du}{\mathrm{dx}}\Rightarrow\varphi\left(u\right)-u=x\frac{du}{\mathrm{dx}}$

- Nếu φ(u)–u≠0 (với mọi u) thì $\mathrm{x\frac{du}{dx}}$=φ(u)–u $\Leftrightarrow$ $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{du}}{\varphi(\mathrm{u})-\mathrm{u}}$ do đó lấy tích phân hai vế $\ln|x|+\ln|\mathrm{C}|=\int\frac{du}{\varphi\left(u\right)-u}$.

Đặt $\phi\left(\mathrm{u}\right)=\int\frac{\mathrm{du}}{\varphi\left(\mathrm{u}\right)\text{-u}}$ thì $\frac{|x|}{C}=e^{\phi(u)}\Leftrightarrow|x|=Ce^{\phi(u)}\Leftrightarrow x=\pm Ce^{\phi(u)}$.

- Nếu φ(u)–u=0 $\Leftrightarrow$ φ(u)=u với mọi u thì $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$ hay $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ $\Leftrightarrow$ $\ln|\mathrm{y}|=\ln|\mathrm{Cx}|$ hay y=Cx.

- Nếu φ(u)–u=0 tại một số hữu hạn giá trị $u=u_0$, $u=u_{1=}$,..., $u=u_n$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy $y=u_0x$, $y=u_1x$, …, $y=u_nx$ là nghiệm của phương trình.

4.2.3.4. Ví dụ

1. Giải phương trình $y'=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$ (1)

Giải

Ta có: $f\left(kx,ky\right)=\frac{\left(kx\right)^2-\left(kxky\right)+\left(ky\right)^2}{\left(kxky\right)}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=f\left(x,y\right)$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow\ y'=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

Đặt $u=\frac{y}{x}$ hay $y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\Rightarrow\varphi(u)=u+x\frac{du}{dx}\Rightarrow\varphi(u)-u=x\frac{du}{dx}$

• Nếu φ(u)–u≠0 ($\Leftrightarrow\frac{u}{-u+1}\neq 0$) thì $x\frac{du}{dx}$=φ(u)–u $\Leftrightarrow\frac{dx}{x}=\frac{du}{\varphi(u)-u}$ do đó lấy tích phân hai vế $\ln|x|+\ln|C|=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}$.

$$\Leftrightarrow\ln|x|+\ln|C|=\int\frac{udu}{-u+1}$$

$$\Leftrightarrow\ln|x|+\ln|C|=-u+\ln|u-1|+\ln|C'|$$

$$\Leftrightarrow\ln|x|=-\frac{x}{y}+\ln\left|\frac{x}{y}-1\right|+\ln|C''|$$

• Nếu φ(u)–u=0 $\Leftrightarrow y=Cx$.

2. Giải phương trình $y'=\frac{x-y}{x+y}$ với điều kiện ban đầu y(1)=0.

4.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (phương trình vi phân không thuần nhất)

4.2.4.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng:

$$y'+p(x)y=q(x)\ (1)$$

trong đó q(x) ≠ 0.

4.2.4.2. Phương pháp giải (phương pháp biến thiên hằng số Lagrange)

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1) thì trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y'+p(x)y=0$ (2)

• Nếu y≠0 thì ta có nghiệm tổng quát của (2) là $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ (3).

• Nếu y=0 thì nó cũng là nghiệm và là nghiệm riêng của phương trình (1) ứng với C=0.

Ta sẽ tìm nghiệm tổng quát của (1) dưới dạng (3) ta sẽ coi C là hằng số của biến x: C=C(x) để (3) là nghiệm của (1).

Từ (3) ta có: $\frac{dy}{dx}=C'e^{-\int p(x)dx}$ + C[-p(x)] $e^{-\int p(x)dx}$ thay vào (1), ta được

$C=\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+D$ với D là hằng số bất kì. (4)

Vậy nghiệm tổng quát của (1) sẽ là:

$$y = \left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+D\right]e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow y=De^{-\int p(x)dx}+\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\,.\,e^{-\int p(x)dx} \quad (5).$$

4.2.4.3.Ví dụ

1. Giải phương trình: $y'+\cos x.y=e^{-\sin x}$ (1).

Giải

Xét phương trình: $y'+\cos x.y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\cos x.y=0 \Leftrightarrow \int\frac{1}{y}dy=-\int\cos xdx$

$\Leftrightarrow \ln|y|=-\sin x+\ln|C|$

$\Leftrightarrow y=C.e^{-\sin x}$

Xem C=C(x).

$\Rightarrow y'=C'.e^{-\sin x}-C.e^{-\sin x}.\cos x$, thế y, y' vào phương trình đã cho, ta được:

$C'=1\Leftrightarrow C=x+D$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $y=(x+D).e^{-\sin x}$.

2. Giải phương trình: $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$.

Giải

Xét phương trình: $y'+\frac{y}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Leftrightarrow \int\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow \ln|y|=\ln|C|-\ln|x| \Leftrightarrow y=\frac{C}{x}$.

Xem C=C(x).

Suy ra $y'=\frac{C'x-C}{x^2}$, thế y, y' vào phương trình đã cho, ta được:

$C'=\sin x \Leftrightarrow C=-\cos x+D$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $y=\frac{-\cos x+D}{x}$.

4.2.5. Phương trình Bernulli

4.2.5.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng:

$$y'+p(x)y=q(x).y^{\alpha} \quad (1)$$

trong đó p(x), q(x) là những hàm số liên tục của x, α là một số thực bất kỳ α≠{0,1}.

4.2.5.2. Phương pháp giải

Với giả thiết y≠0 chia cả hai vế (1) cho y^{α}, ta được:

$$y'.y^{-\alpha}+y^{1-\alpha}.p(x)=q(x) \quad (2)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$ thế vào phương trình (2), ta được:

$$z' + (1-\alpha) p(x) z = (1-\alpha) q(x) \quad (3)$$

phương trình (3) là phương trình tuyến tính cấp một không thuần nhất đối với z=z(x) là hàm số phải tìm.

Giải phương trình (3) ta sẽ nhận được nghiệm z=z(x) và sau đó thay z vào $z = y^{1-\alpha}$ thì ta được nghiệm tổng quát của phương trình Bernoulli.

4.2.5.3. Ví dụ

1. Giải phương trình: $y' + \frac{2}{x} y = \frac{y^3}{x^2} (x \neq 0)$.

Giải

Chia hai vế cho $y \neq 0$, ta được: $y'y^{-3} + \frac{2}{x} y^{-2} = \frac{1}{x^2} (*)$.

Đặt $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$ thế vào phương trình (*): $z' - \frac{4}{x} z = \frac{-2}{x^2}$ (**)

Xét phương trình $z' - \frac{4}{x} z = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} dz = \frac{4}{x} dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{z} dz = \int \frac{4}{x} dx \Leftrightarrow \ln\left|\frac{z}{C}\right| = 4\ln|x|$

$\Rightarrow z = C.x^4 \Rightarrow z' = C'x^4 + 4C.x^3$, thế z, z' vào phương trình (**): $C' = \frac{-2}{x^6} \Rightarrow$ $C = \frac{2}{x^5} + D$.

Suy ra nghiệm của pt (**)$\Rightarrow z = y^{-2} = \left(\frac{2}{x^5} + D\right).x^4$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho $y^{-2} = \frac{2}{x} + Dx^4$.

2. Giải phương trình: $y' + \frac{y}{x} = xy^2$.

3. Giải phương trình: $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

4.2.6. Phương trình vi phân toàn phần

4.2.6.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

trong đó, P(x,y)dx+Q(x,y)dy= $d\Phi(x, y)$ với Φ là một hàm nào đó.

4.2.6.2. Cách giải

Để nhận biết phương trình (1) có phải là phương trình vi phân toàn phần hay không và tìm cách giải nó ta xét định lý sau:

Định lý: Giả sử các hàm P(x,y); Q(x,y) là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng ở trong miền D thì điều kiện cần và đủ cho P(x,y)dx+Q(x,y)dy là vi phân toàn phần của hàm (x,y) nào đó trong D khi và chỉ khi thỏa mãn $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (2) với mọi $(x,y)\in D$.

Khi điều kiện (2) được thỏa mãn, hàm số $\Phi(x,y)$ có vi phân toàn phần là P(x,y)dx+Q(x,y)dy có thể tìm được theo công thức:

$$\Phi(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x_o,y)dy$$

Hoặc

$$\Phi(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x,y)dy$$

Trong đó x_o và y_o được chọn tùy ý sao cho điểm $(x_o,y_o)\in D$.

***Chú ý:** Theo định lý trên điểm (x_o,y_o) có thể chọn tùy ý, miễn là thuộc miền D, nhưng ta nên chọn điểm (x_o,y_o) sao cho tích phân trong công thức tính toán đơn giản nhất.

4.2.6.3. Ví dụ

Giải các phương trình:

a) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+3y^3)dy=0$

Giải

Ta có: $P=3x^2+6xy^2$, $Q=6x^2y+3y^3$ xác định với $D=\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}P'_y=12xy\\ Q'_x=12xy\end{cases}\Rightarrow P'_y=Q'_x,\ \forall(x,y)\in D$$

Do đó phương trình vi phân đã cho là phương trình vi phân toàn phần.

Gọi hàm số $\Phi(x,y)$ có vi phân toàn phần là P(x,y)dx+Q(x,y)dy,

Chọn $(0,1)\in D$, ta được:

$$\Phi(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x,y)dy=\int_{0}^{x}P(x,1)dx+\int_{1}^{y}Q(x,y)dy$$

$$=\int_{0}^{x}(3x^2+6x.1)dx+\int_{0}^{y}(6x^2y+3y^3)dy$$

$$=3\int_{0}^{x}(x^2+2x)dx+3\int_{1}^{y}(2x^2y+y^3)dy=x^3-\frac{8}{3}x^2+3x^2y^2+\frac{3}{4}y^4-\frac{3}{4}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $x^3-\frac{8}{3}x^2+3x^2y^2+\frac{3}{4}y^4-\frac{3}{4}=C$.

b) $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy=0$

Giải

$P=3x^2(1+\ln y), Q=-2y+\dfrac{x^3}{y}$, (tập xác định $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y>0\}$)

Ta có $P'_y=Q'_x=3\dfrac{x^2}{y}$ $\forall(x,y)\in D$.

$$\Phi(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x,y)dy=\int_0^x 3x^2dx+\int_1^y\left(-2y+\frac{x^3}{y}\right)dy$$

$$=x^3-y^2+1+x^3\ln y$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $x^3-y^2+1+x^3\ln y=C$.

c) $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$.

4.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

4.3.1. Các khái niệm cơ bản

4.3.1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng:

$$F(x,y,y',y'')=0 \text{ hay } y''=f(x,y,y') \ (1)$$

4.3.1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét phương trình $y''=f(x,y,y')$. Nếu $f(x,y,y')$ có đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong lân cận của điểm (x_0,y_0,y'_0) thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $y=y(x)$ xác định và liên tục trên khoảng đủ nhỏ $(x_o-\delta,x_o+\delta)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o)=y_o$, $y'(x_o)=y'_o$.

4.3.1.3. Định nghĩa

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là hàm $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ thỏa (1) với mọi hằng số C_1,C_2.

Hàm $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$ được gọi là nghiệm riêng.

Nếu nghiệm tổng quát tìm được dưới dạng ẩn $\phi(x,C_1,C_2)=0$ (2) thì (2) được

4.3.2. Các phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được

Cho phương trình $y''=f(x,y,y')$ (1)

Ta xét các trường hợp đặc biệt có thể đưa phương trình (1) về dạng phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đặt ẩn phụ.

4.3.2.1. Loại 1

Phương trình (1) có dạng: $y''=f(x)$.

Vì $(y')' = y'' = f(x)$ nên $y' = \int f(x)dx + C_1$.

Tích phân lần nữa ta được :

$$y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$$

Với C_1, C_2 là hằng số.

Ví dụ: Cho phương trình $y'' = \sin x$ (1).

Tìm nghiệm tổng quát và một nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Giải

Ta có $y'' = \sin x \Rightarrow y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1$

$\Rightarrow y = \int(-\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1 x + C_2$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là $y = -\sin x + C_1 x + C_2$.

Vì $y(0) = 0 \Rightarrow -\sin 0 + C_1 0 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$.

Vì $y'(0) = 1 \Rightarrow -\cos 0 + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 2$

Vậy nghiệm riêng thỏa điều kiện y=-sinx+2x.

4.3.2.2 Loại 2

Phương trình (1) có dạng: $y'' = f(x, y')$.

Đặt $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$.

Khi đó phương trình (1) có dạng $p'(x) = f(x, p)$

Đây là phương trình vi phân cấp 1 với p(x) là nghiệm. Giải ra ta được nghiệm tổng quát của nó là $p(x) = \varphi(x, C_1)$.

Vì $y' = p(x)$ nên $y' = \varphi(x, C_1)$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

Ví dụ: Giải phương trình $y'' = x - \frac{y'}{x}$ (1)

Giải

Đặt $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$. Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$p'(x) = x - \frac{p(x)}{x} \text{ hay } p'(x) + \frac{p(x)}{x} = x \quad (2).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với x biến độc lập và p(x) là hàm phải tìm.

Ta có nghiệm tổng quát của (2) là $p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$.

Vì $y' = p(x)$ nên $y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int \frac{x^2}{3} dx + C_1 \int \frac{dx}{x} + C_2 = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

4.3.2.3 Loại 3

Phương trình (1) có dạng: $y'' = f(y', y'')$ (1).

Đặt $y' = p$ và xem p là hàm của y.

Ta có $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng

$p\frac{dp}{dy} = f(y,p)$ hay $\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} f(y,p)$.

Xem phương trình trên là phương trình vi phân cấp 1 với y là biến độc lập và p là hàm phải tìm. Giải ra ta được nghiệm tổng quát của nó là:

$$p = \varphi(y, C_1)$$

Vì $p = y' = \frac{dy}{dx}$ nên $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ hay $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} - dx = 0$.

Đây là phương trình có biến phân ly. Tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} - x = C_2$

Ví dụ: Giải phương trình $2yy'' + y'^2 = 0$ (1)

Đặt $p = y'$ thì $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow 2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \Rightarrow p\left(2y\frac{dp}{dy} + p\right) = 0$.

$* \; p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$.

$* \; 2y\frac{dp}{dy} + p = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dy}{y} = 0$.

Phương trình có dạng phân li, tích phân hai vế ta được

$\ln|p| + \frac{1}{2}\ln|y| = \ln|C_0|$ hay $\ln\left|p\sqrt{|y|}\right| = \ln|C_0| \Leftrightarrow p\sqrt{|y|} = C_0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_0}{\sqrt{|y|}}$ hay

$\sqrt{|y|}dy = C_0 dx \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}} = C_1 x + C_2$.

4.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

4.3.3.1 Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình có dạng

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

trong đó a_1, a_2 là những hàm số của biến x.

♦ Nếu $f(x) \equiv 0$ thì (1) được gọi là phương trình thuần nhất.

♦ Nếu $f(x) \neq 0$ thì (1) được gọi là phương trình không thuần nhất. Và đặc biệt khi a_1, a_2 là những hằng số thì (1) còn được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số là hằng số.

4.3.3.2. Phương trình thuần nhất

Xét phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ (2).

♦ **Định lý 1.** Nếu $y_1 = y_1(x)$; $y_2 = y_2(x)$ là hai nghiệm riêng của (2) thì $y = C_1y_1 + C_2y_2$ trong đó C_1, C_2 là những hằng số tùy ý, cũng là nghiệm của (2).

♦ **Định nghĩa**. Hai hàm y_1 và y_2 được gọi là độc lập tuyến tính trên $[a,b]$ nếu tỉ số của chúng trên đoạn đó không phải là một hằng số, nghĩa là $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$.

Trường hợp ngược lại hai hàm được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Nếu hai hàm $y_1(x), y_2(x)$ là các hàm khả vi trong khoảng (a,b) thì định thức $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ được gọi là định thức Wrônski của hai hàm.

♦ **Định lý 2.** Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (2) thì tồn tại một hằng số C sao cho $W(x) = W(y_1, y_2) = Ce^{-\int a_1(x)dx}$.

♦ **Định lý 3.** Các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình (2) với $y_1(x)$ hoặc $y_2(x)$ không triệt tiêu trên (a,b) là độc lập tuyến tính trong khoảng (a,b) khi và chỉ khi định thức Wrônski của chúng không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào trong khoảng (a,b).

♦ **Định lý 4.** Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (2) thì hàm $y = C_1y_1 + C_2y_2$ trong đó C_1, C_2 là những hằng số tùy ý là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

♦ **Nhận xét.** Từ định lý 4, ta thấy rằng muốn tìm nghiệm tổng quát của (2) ta cần phải biết hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Không có phương pháp tổng quát nào để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2). Sau đây ta đi đến một định lý cho phép ta tìm một nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với một nghiệm riêng đã biết trước.

⬩ **Định lý 5.** Nếu biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình tuyến tính thuần nhất (2) thì ta có thể tìm một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình (2) độclập tuyến tính với $y_1(x)$ bởi $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx$.

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Giải

Bằng cách thử trực tiếp, ta thấy phương trình có nghiệm riêng $y_1 = x$. Ta tìm nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1.

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx$$

$$= x\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right)dx = x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1x + C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right).$$

4.3.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

Xét phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (1)

trong đó a_1, a_2 là những hàm số của biến x và $f(x) \neq 0$.

⬩ **Định lý 6.** Nghiệm tổng quát của phương trình (1) bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2) cộng với một nghiệm riêng Y nào đó của phương trình (1).

***Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange**

Xét phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (1)

Giả sử $y=C_1y_1+C_2y_2$ (3) là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng (3) với C_1 và C_2 là các hàm số của x.

Đạo hàm hai vế (3) ta được $y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2$

Ta chọn C_1, C_2 sao cho $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$.

Khi đó có thể viết lại $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$.

Đạo hàm hai vế lần nữa, ta được $y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$.

Thay y, y', y'' vào (1), ta được

$C_1\left(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2\right) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$.

Vì y_1, y_2 là các nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (2) nên các biểu thức trong dấy ngoặc đều bằng 0. Do đó đẳng thức trên có dạng

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Như vậy hàm số y sẽ là nghiệm riêng của phương trình (1) nếu như C_1, C_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Vì y_1, y_2 độc lập tuyến tính nên

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

Do đó hệ trên có nghiệm duy nhất

$$C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$$

Lấy tích phân hai vế của các đẳng thức trên ta nhận được

$$C_1 = \int \varphi_1(x)dx + D_1, C_2 = \int \varphi_2(x)dx + D_2$$

Do nghiệm cần tìm là nghiệm riêng nên ta có thể chọn $D_1 = D_2 = 0$. Tha vào (3) ta được nghiệm riêng của phương trình (1) là

$$Y = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx$$

♦ **Định lý 7**. (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

Cho phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x) \quad (4)$$

Nếu Y_1 là một nghiệm của phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$ và Y_2 là một nghiệm của phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$ thì hàm $Y=Y_1+Y_2$ là nghiệm của phương trình (4)

Ví dụ:

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = x$.

Giải

* Trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Ta có $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$ hay $d(\ln|y'|) = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y'| = \ln|x| + \ln|C|$ hay $y' = Cx$.

Do đó $y = C_1x^2 + C_2$.

* Tìm nghiệm riêng của phương trình dạng

$$Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1x^2 + C_2.1$$

Với C_1, C_2 thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} C_1' x^2 + C_2'.1 = 0 \\ C_1' 2x + C_2'.0 = x \end{cases}$$

Giải hệ ta được $C_1' = 1/2, C_2' = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{x}{2} + D_1, C_2 = -\frac{x^3}{2} + D_2$

Chọn $D_1 = D_2 = 0$ thì $Y = \frac{x}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$Y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$.

4.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng

4.3.4.1. Phương trình thuần nhất

♦ **Định nghĩa.** Xét phương trình tuyến tính thuần nhất

$$y'' + py' + qy = 0$$

trong đó p,q là hằng số.

♦ **Phương pháp giải**

Xét phương trình đặc trưng $k^2+pk+q=0$.

+ Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt $k=k_1, k=k_2$ thì phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ (với C_1, C_2 là các hằng số).

+ Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép $k=k_0$ thì phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = (C_1 + C_2 x) e^{k_0 x}$.

+ Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$ thì phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

♦**Ví dụ:** Giải các phương trình sau

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Giải

Ta có: $k^2\text{-}4k+4=0 \Leftrightarrow k_1=k_2=2$

Vậy phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$.

b) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Giải

Ta có: $k^2+2k+5=0 \Leftrightarrow k_1=-1-2i; k_2=-1+2i$

Vậy phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

4.3.4.2. Phương trình không thuần nhất

♦ **Định nghĩa.** Phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất phương trình có dạng

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

trong đó p, q là hằng số.

♦ **Phương pháp giải:**

Theo định lý 6 Mục 4.3.3.3, sau khi biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, ta có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1) thông qua việc tìm một nghiệm riêng của nó bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Tuy nhiên đối với một số dạng đặc biệt của vế phải f(x), có thể tìm một nghiệm riêng của (1) mà không cần phải dùng cách trên.

Ta tìm nghiệm riêng của (1) trong hai trường hợp dưới đây:

***Trường hợp 1:** $f(x)=e^{\alpha x}.P_n(x)$ với $P_n(x)$ là một đa thức bậc n và α là hằng số.

So sánh α với các nghiệm k_1,k_2 của phương trình đặc trưng. Ta có các trường hợp sau:

+ Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng của (1) có dạng: $Y=e^{\alpha x}.Q_n(x)$.

Trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc với đa thức $P_n(x)$ có n+1 hệ số mà ta cần phải xác định bằng phương pháp hệ số bất định sau:

Lấy đạo hàm hai vế của $Y=e^{\alpha x}.Q_n(x)$, ta được $Y'=\alpha e^{\alpha x}.Q_n(x)+e^{\alpha x}.Q_n'(x)$

$Y''=\alpha^2 e^{\alpha x}.Q_n(x)+2\alpha e^{\alpha x}.Q_n'(x)+e^{\alpha x}.Q_n''(x)$.

Thế Y, Y', Y'' vào (1) rồi rút gọn ta được:

$$e^{\alpha x}\left[Q_n''(x)+(2\alpha+p)Q_n'(x)+\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)Q_n(x)\right]=e^{\alpha x}P_n(x)$$

hay $Q_n''(x)+(2\alpha+p)Q_n'(x)+\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)Q_n(x)=P_n(x)$ (*)

Vì α không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $\alpha^2+p\alpha+q \neq 0$. Do đó vế trái của biểu thức (*) là một đa thức bậc n, cùng bậc với vế phải. Đồng nhất các hệ số của lũy thừa cùng bậc ở hai vế của (*) ta được n+1 phương trình bậc nhất với n+1 ẩn là các hệ số của đa thức $Q_n(x)$. Giải hệ gồm n+1 ta tìm được các hệ số của đa thức $Q_n(x)$.

+ Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng:

Ta có $\alpha^2+p\alpha+q=0$. Khi đó vế trái của (*) là đa thức bậc n-1. Muốn hàm dạng $Y=e^{\alpha x}.Q_n(x)$ nghiệm đúng phương trình (1) thì ta phải nâng bậc của đa thức $Q_n(x)$ lên một đơn vị. Ta tìm nghiệm riêng của (1) có dạng $Y=xe^{\alpha x}.Q_n(x)$.

+ Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng:

Ta có $\alpha^2+p\alpha+q=0$ và $2\alpha+p=0$. Khi đó vế trái của (*) là đa thức bậc n-2. Ta tìm nghiệm riêng của (1) có dạng $Y=x^2e^{\alpha x}.Q_n(x)$.

Ví dụ: Giả các phương trình sau:

a) $y'' - 2y' + y = x + 1$.

Giải

Xét phương trình: $y'' - 2y' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 1$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng: $y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $\mathrm{Y} = \mathrm{Ax} + \mathrm{B}$.

Thế Y, Y', Y'' vào phương trình đã cho, ta được: A=1, B=3 $\Rightarrow$ $\mathrm{Y} = \mathrm{x} + 3$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right) + x + 3$

b) $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$

Giải

Xét phương trình: $y'' - 4y' + 3y = 0$,

Ta có phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1, k = 3$.

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $Y = Ae^{-2x}$

$\Rightarrow Y' = -2A.e^{-2x}$, $Y'' = 4A.e^{-2x}$, thế Y, Y', Y'' vào phương trình đã cho, ta được:

$4Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} - 6e^{-2x} = 10e^{-2x} \Leftrightarrow 6A = 10 \Leftrightarrow A = \dfrac{5}{3}$.

Suy ra nghiệm riêng của phương trình đã cho là $Y = \dfrac{5}{3}e^{-2x}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \dfrac{5}{3}e^{-2x}$

c) $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$.

d) $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

***Trường hợp 2**: $f(x) = e^{\alpha x}.\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right](\beta \neq 0)$, trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n và m; α, β là các hằng số.

Tương tự như trường hợp trên, ta có:

+ Nếu $\alpha \pm \beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng:

$Y = e^{\alpha x}\left[R_r(x)\cos\beta x + S_r(x)\sin\beta x\right]$.

+ Nếu $\alpha \pm \beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng:

$Y = xe^{\alpha x}\left[R_r(x)\cos\beta x + S_r(x)\sin\beta x\right]$.

trong đó $R_r(x), S_r(x)$ là các đa thức bậc r=max(m,n) có các hệ số mà ta cần xác định bằng hằng số bất định.

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $y'' + y = \sin 2x$.

Giải

Xét phương trình: $y'' + y = 0$,

Phương trình đặc trưng: $k^2+1=0$ $k = \pm i$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng: $y = C_1\cos x + C_2 \sin x$

Ta có $\beta = 2$ và $i\beta = 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên bậc r=0.

Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $Y= A.\cos 2x + B.\sin 2x$.

Thế $Y,\ Y',\ Y''$ vào phương trình đã cho, ta được A=0, B=-1/3.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = C_1\cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$.

b) $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$.

Giải

Nghiệm của phương trình đặc trưng $k_1 = k_2 = 1$, nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng $y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Ta cần tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng: $Y = Y_1 + Y_2$

Với Y_1 là nghiệm riêng của phương trình: $y'' - 2y' + y = \sin x \Rightarrow Y_1 = A\cos x + B\sin x$, Y_2 là nghiệm riêng của phương trình $y'' - 2y' + y = e^{-x} \Rightarrow Y_2 = A.e^{-x}$.

Giải tương tự như các ví dụ trên $\Rightarrow Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right) + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}.$$

BÀI TẬP CỦNG CỐ CHƯƠNG 4

Phương trình vi phân cấp 1 có biến phân li

1. Giải phương trình: $\sqrt{y^2+1}dx\text{-}xydy=0$.

2. Giải phương trình: $x\sqrt{1\text{-}y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$.

3. Giải phương trình: $y^2y'=x\left(1+x^2\right)$.

4. Giải phương trình: $\left(xy^2+4x\right)dx+\left(y+x^2y\right)dy=0$.

5. Giải phương trình: $xy=\left(1+x^2\right)y'$

6. Giải phương trình: $ydx=\left(x^2\text{-}a^2\right)dy$.

Giải các bài toán giá trị ban đầu

7. Giải phương trình: $y'=\dfrac{xy+3x}{x^2+1}$ với y(2)=2.

8. Giải phương trình: $y'+\cos\left(x+2y\right)=\cos\left(x\text{-}2y\right)$ với $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

9. Giải phương trình: $e^{1+x^2}\tan y dx\text{-}\dfrac{e^{2x}}{x\text{-}1}dy=0$ với $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

10. Giải phương trình: $y'+\dfrac{1}{x}y=0$.

11. Giải phương trình: $y'\text{-}\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x\ \left(x>0\right)$.

12. Giải phương trình: $y'\text{-}2xy=2xe^{x^2}$, $y(1)=0$.

Phương trình Bernoulli

13. Giải phương trình: $y'\text{-}y=xy^5$.

14. Giải phương trình: $y'\text{-}\dfrac{y}{2x}=\text{-}\dfrac{\sin x}{2x}y^3$

15. Giải phương trình: $x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^2\sqrt{y}$.

Giải các phương trình cho dưới đây nếu đó là phương trình vi phân toàn phần

16. $\left(3x^2-3y+1\right)dx-\left(3x-1\right)dy=0$

17. $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy=0\,(y>0)$

18. $(\cos y+y\cos x)dx-(\sin x-x\sin y)dy=0$

19. $\left(3x^2+6xy-2y^2\right)dx+\left(3x^2-4xy+4y^3\right)dy=0$

20. $x\ln y dx-(x+y\ln x)dy=0\,(x>0, y>0)$

21. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

22. $2xydx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$

23. $2y^2\left(x+y^2\right)dx+xy\left(x+6y^2\right)dy=0$

24. $\left(3y-e^x\right)dx+xdy=0$

Phương trình vi phân cấp 2

25. Giải phương trình khi biết một nghiệm y_1

a) $y''+y=0$ biết $y_1=\cos x$

b) $y''-y'-2y=0$ biết $y_1=e^{-x}$

c) $\left(x^2+1\right)y''-2xy'+2y=0$ biết $y_1=x$

d) $4x^2y''+y=0,(x>0)$ biết $y_1=\sqrt{x}$

26. Giải các phương trình sau:

a) $y''-4y'+3y=0$

b) $y''-2y'+y=0$

c) $y''+4y=0$

27. Giải các phương trình sau:

a) $y''-2y'-3y=e^{4x}$

b) $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$

c) $y''-2y'+y=x+1$

d) $y''-2y'+y=6xe^x$

e) $y''-2y'+2y=2x^2$

f) $y''-2y'+y=(2x+3)e^x$

g) $y''-y=2e^x-x^2$

28. Giải các phương trình sau:

a) $y'' - 5y' = \sin 5x$

b) $y'' + y = \sin x$

c) $y'' - y = x\cos^2 x$

d) $y'' - 3y' = e^{2x} + \sin 2x$.

e) $y'' + 4y = \sin 2x + 1$

f) $y'' + y = \sin^3 x$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỂ BIÊN SOẠN NỘI DUNG MÔN HỌC:*

[1] Trần Bình, Bài tập giải sẵn Giải tích II, NXBKH và KT, 2008.

[2] Tạ Ngọc Đạt - Nguyễn Đình Trí, Toán cao cấp Tập III. NXBGD, 1999.

[3] Nguyễn Hữu Khánh, Vi tích phân A2, Đại học Cần Thơ.

[4] Nguyễn Đình Trí - Tạ Văn Đỉnh - Nguyễn Hồ Quỳnh, Bài tập Toán cao cấp Tập III. NXBGD, 2010.

[5] Jean-Marie Monier - Giải tích 1, Giải tích 2, NXB GD, 2006.

- Khác (địa chỉ website): www.ebook.edu.vn, www.violet.vn, www.vms.org.vn.

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỀ NGHỊ CHO HỌC VIÊN:*

[1] Phạm Ngọc Thao, Giáo trình toán đại cương, NXB ĐHQGHN, 1998.

[2] Nguyễn Duy Tiến, Bài giảng giải tích tập II, NXB ĐHQGHN, 2001.